

Mecânica Celeste e Aplicações

6ª Escola de Astrofísica e Gravitação do IST

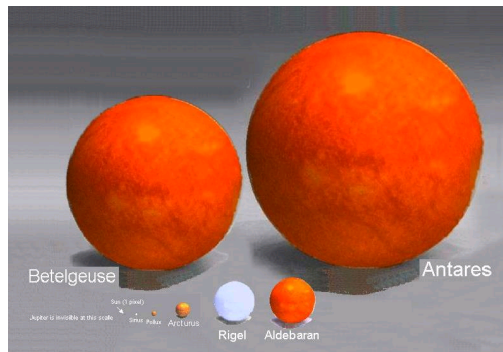
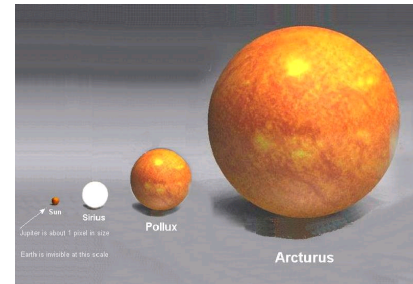
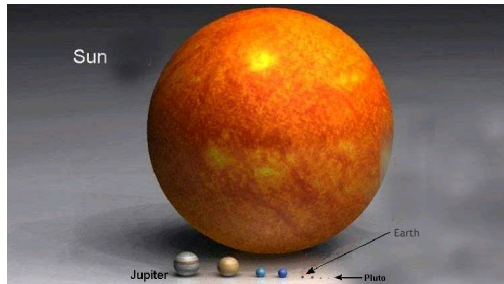
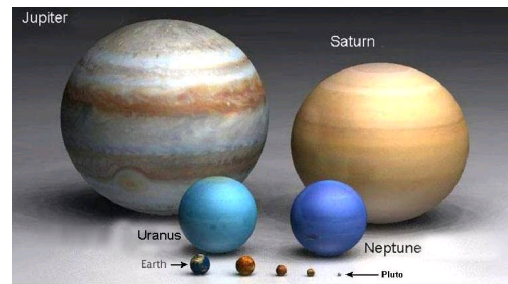
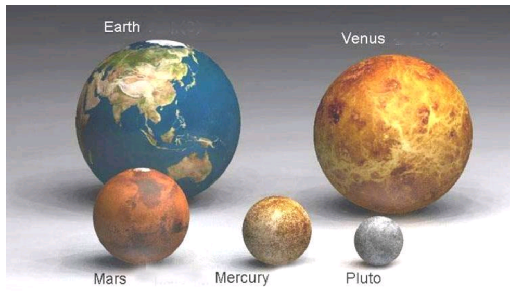
Amaro J. Rica da Silva

- **Adinâmica dos corpos sob a interação de forças ideais centrais, em particular gravíticas.**
- **Dimensões dos astros e órbitas. "Leis" de Bode.**
- **Tipificação da dinâmica dominante do problema de dois corpos, em particular nas colisões. Esferas de Influência.**
- **Adinâmica de colisões 2D entre partículas pontuais e os diagramas bidimensionais.**
- **Manobras Gravitacionalmente Assistidas (slingshot) e os parâmetros orbitais.**
- **Adinâmica da colisão 3D. O papel das constantes de movimento. O vector de Runge-Lenz e o Momento Angular e o seu significado geométrico.**
- **Possíveis aplicações: Trajectórias para missões interplanetárias e extra-solares; Estudo de ejeção de massa em clusters de sistemas binários.**

Introdução

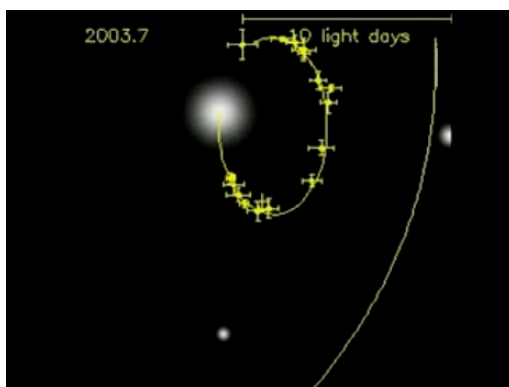
Os Astros e suas Dimensões

As dimensões dos astros variam em várias ordens de grandeza, tanto na massa como em extensão, o que afecta não só as distâncias para as quais as aproximações como "ponto material" são usáveis como a própria noção de "esfera de influência gravítica" de cada astro.

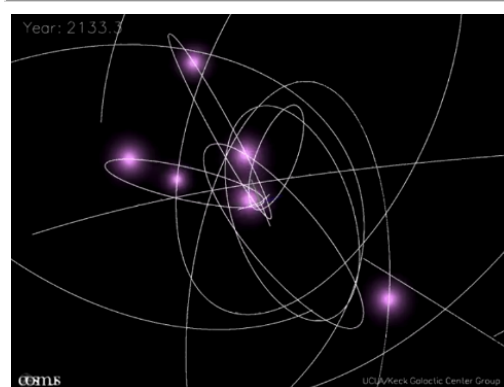


Movimento em campo gravitacional

- Motion of stars at galaxy center



- Animation predicted motion of stars at galaxy center



O Computador de Anticitera (Sec II A.C.)

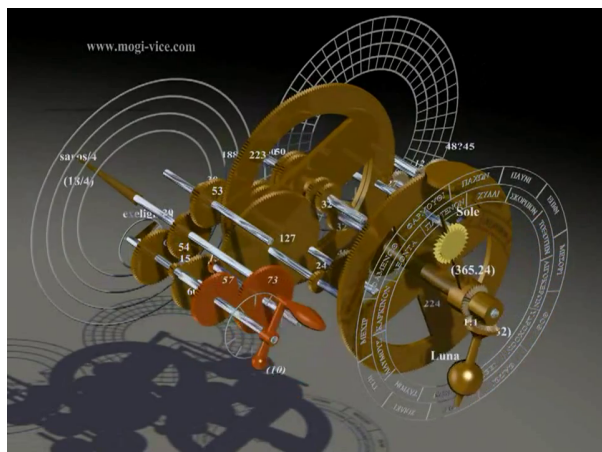
A existência desta máquina há cerca de 2100 anos mostra quão frágil pode ser o processo civilizacional se não forem dedicados esforços para preservar e transmitir o conhecimento académico. Nenhuma engrenagem

mecânica tão complexa se conhece depois desta durante mil anos. Há vestígios de que a civilização árabe tenta reproduzir a máquina mas apenas consegue fracções mínimas da sua funcionalidade. Este conhecimento desaparece com o domínio romano do mediterrâneo e da Grécia. Dada a importância estratégica da mitologia associada aos astros no planeamento das campanhas militares, na calendarização de colheitas e de festas religiosas, é natural que poucos soubessem como funcionaria a máquina, e muitos menos como construí-la. Por outro lado, sendo feita de bronze, um metal reciclável e muito procurado na altura, é provável que muitas tenham sido destruídas por ignorância ou por avaria.

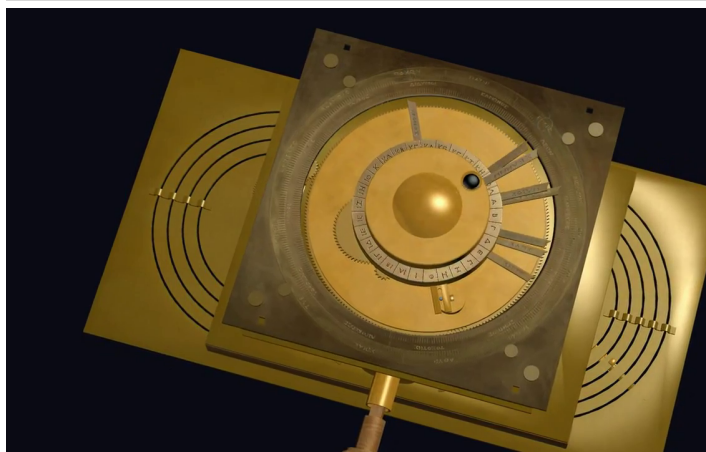
Decoding the ancient Greek astronomical calculator known as the Antikythera mechanism - Freeth et al. - 2006

Calendars with Olympiad display and eclipse prediction on the Antikythera mechanism - Freeth et al. - 2008

The Antikythera Mechanism 3D



The Antikythera Mechanism model according to M. Wright



As Leis de Bode (1 A.U. $\approx 150 \times 10^6$ Km)

Johan Daniel Titius (1729-1796) inclui uma fórmula que se resume a $d_n = 4 + 3 \times 2^n$ na tradução para Alemão dum livro Francês de astronomia em 1766. Johann Elert Bode (1747-1826) inclui a fórmula no seu tratado em 1772. A existência de regularidades em todos os sistemas planetários observados é uma indicação de que existem “resonâncias” estáveis em sistemas de N corpos.

■ Titius-Bode (1766-1772):

$$d_n = 0.4 + 0.3 \times 2^n \quad (n = -\infty, 0, 1, 2, \dots)$$

Wurm (1803):

$$d_n = 0.3(1 + 2^n) \quad (n = -1, 0, 1, 2, \dots)$$

Gauss (1880):

$$d_n = 0.2099 \times 1.7226^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Nicolini (1957):

$$d_n = 0.4 + 0.075 \times 2^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Blagg (1913):

$$d_n = A \times 1.7275^n (B + \mathcal{F}(\alpha + n \beta)) \quad (n = -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

A Review of Blagg's formula in the light of recently discovered planetary moons and rings, Loban, Roy, Brown, J.Brit.Astr. Soc., 1982

Review of Blagg's Formula, Loban, Roy, Brown 82)

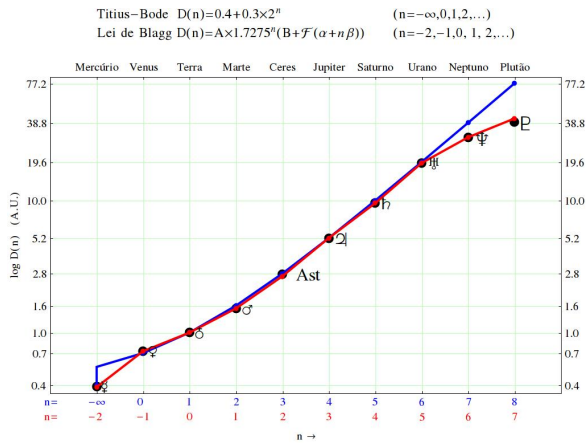


Table II

Planet	n	Distance	Blagg's law
Mercury	-2	0.387	0.387
Venus	-1	0.723	0.723
Earth	0	1.000	1.000
Mars	1	1.524	1.524
Vesta	2	2.361	2.67
Juno		2.670	
Pallas		2.767	
Ceres	2	2.767	
Jupiter	3	5.203	5.200
Saturn	4	9.546	9.550
Uranus	5	19.20	19.23
Neptune	6	30.07	30.13
Pluto*	7	39.5	41.8

*New object, dealt with by Roy².

Imagem 1

• **Satélites de Jupiter**

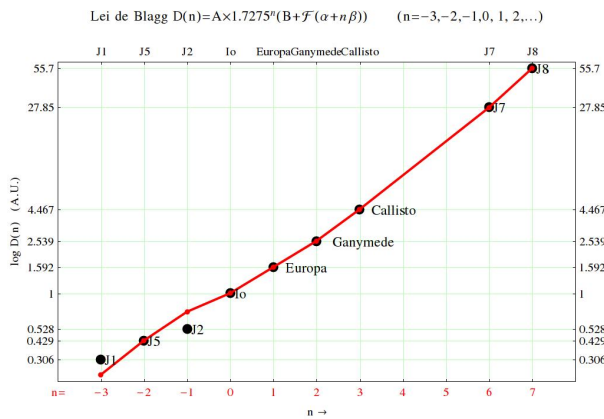


Table III

Satellite	n	Distance	Blagg's law
1979 J1*	-3	0.306	0.233
1979 J3*	-2	0.429	0.429
J5	-1	0.528	0.718
1979 J2*	-1	0.528	0.718
Io	0	1.000	1.000
Europa	1	1.592	1.592
Ganymede	2	2.539	2.541
Callisto	3	4.467	4.467
J7	6	26.30	27.54
J6		27.25	
J10†		27.85	
J12†	7	49.8	55.46
J11†		53.3	
J8		55.7	
J9†		56.2	

*New object, dealt with in this paper.
 †New object, dealt with by Roy.

Imagem 4

• **Satélites de Saturno**

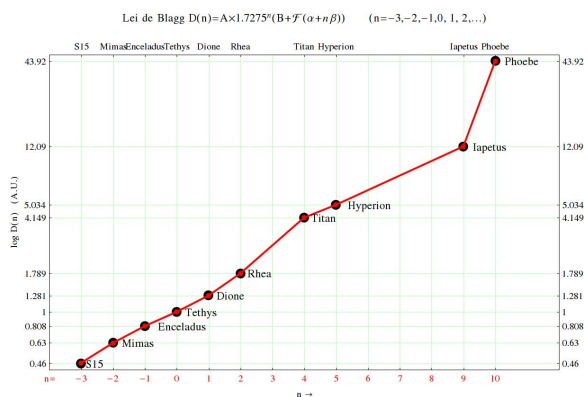


Table IV

Satellite	n	Distance	Blagg's law
S15*	-3	0.460	0.463
S14*		0.468	
S13*		0.478	
S10* ¹		0.511	
S11* ²	-2	0.511	0.626
S11* ³		0.511	
Mimas	-2	0.630	0.626
Enceladus	-1	0.808	0.807
Tethys	0	1.000	1.000
Dione	1	1.281	1.279
S12*		1.281	
Rhea	2	1.789	1.786
Titan	3	4.149	4.140
Hyperion	4	5.034	5.023
Iapetus	9	12.09	12.11
Phoebe	10	43.92	43.85

*New object, dealt with in this paper.

Imagem 6

• **Satélites de Urano**

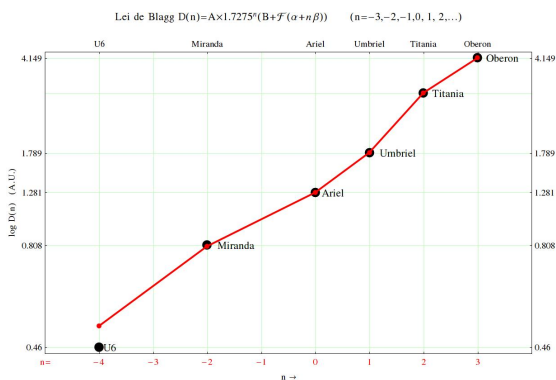


Table V

Satellite	Distance	n	Blagg's law	n	This paper
U6*	0.277	-4	0.33	-2	0.273
Miranda†	0.646	-2	0.64	-1	0.648
Ariel	1.000	0	1.00	0	1.000
Umbriel	1.391	1	1.393	1	1.387
Titania	2.281	2	2.286	2	2.283
Oberon	3.057	3	3.055	3	3.059

*New object, dealt with in this paper.
†New object, dealt with by Roy.

Imagem 7

Dinâmica de N corpos

O problema geral

Para N corpos as equações de movimento clássicas são, usando $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$,

$$M_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i}^N M_j \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}$$

É possível mostrar que existem 10 integrais de movimento para o problema de N corpos, a saber a posição inicial e velocidade do centro de massa, o momento angular total (que define o plano invariante de Laplace) e a energia total.

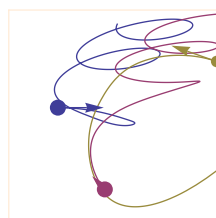
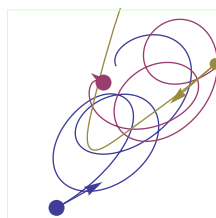
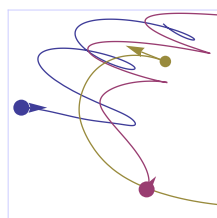
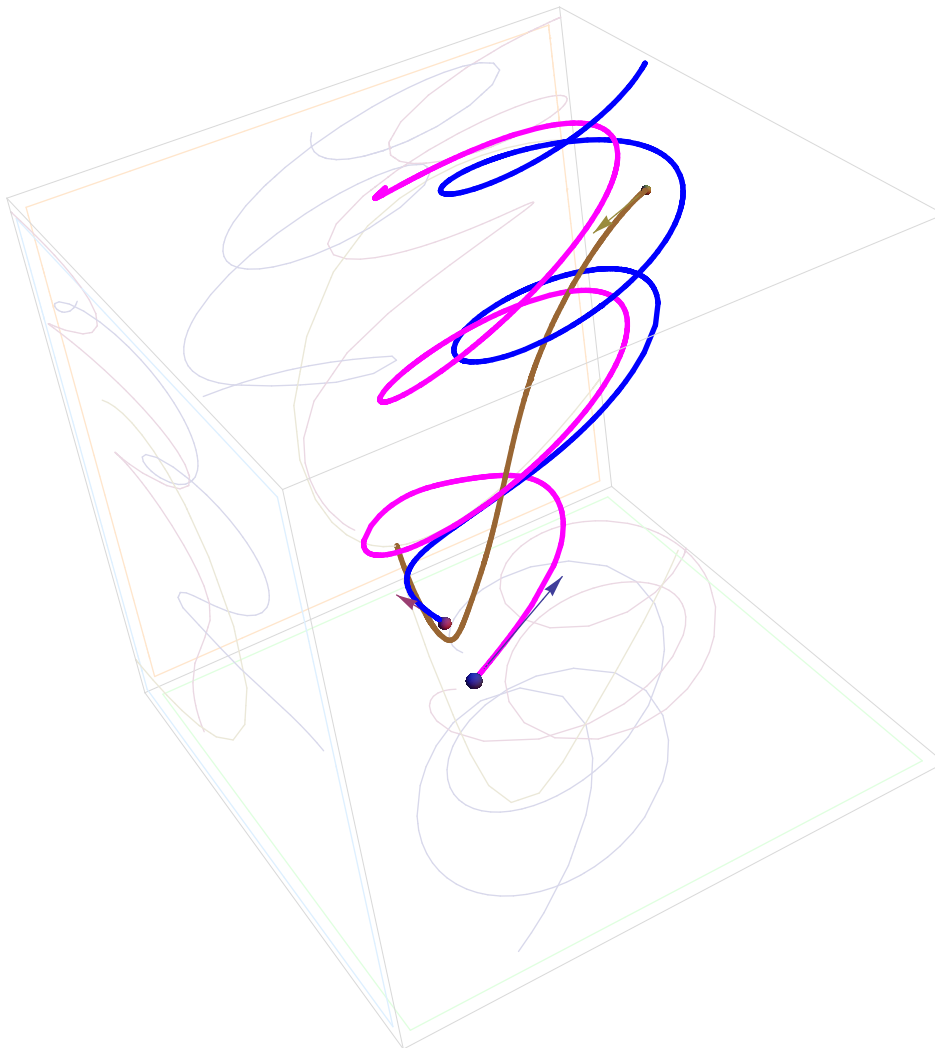
Dinâmica de três corpos

$m_1 \ddot{x}_1 = G \left(\frac{m_2 (-x_1(t) + x_2(t))}{d_{1,2}^3} + \frac{m_3 (-x_1(t) + x_3(t))}{d_{1,3}^3} \right)$	$m_2 \ddot{x}_2 = G \left(\frac{m_1 (x_1(t) - x_2(t))}{d_{1,2}^3} + \frac{m_3 (-x_2(t) + x_3(t))}{d_{2,3}^3} \right)$	$m_3 \ddot{x}_3 = G \left(\frac{m_1 (x_1(t) - x_3(t))}{d_{1,3}^3} + \frac{m_2 (x_2(t) - x_3(t))}{d_{2,3}^3} \right)$
$m_1 \ddot{y}_1 = G \left(\frac{m_2 (-y_1(t) + y_2(t))}{d_{1,2}^3} + \frac{m_3 (-y_1(t) + y_3(t))}{d_{1,3}^3} \right)$	$m_2 \ddot{y}_2 = G \left(\frac{m_1 (y_1(t) - y_2(t))}{d_{1,2}^3} + \frac{m_3 (-y_2(t) + y_3(t))}{d_{2,3}^3} \right)$	$m_3 \ddot{y}_3 = G \left(\frac{m_1 (y_1(t) - y_3(t))}{d_{1,3}^3} + \frac{m_2 (y_2(t) - y_3(t))}{d_{2,3}^3} \right)$
$m_1 \ddot{z}_1 = G \left(\frac{m_2 (-z_1(t) + z_2(t))}{d_{1,2}^3} + \frac{m_3 (-z_1(t) + z_3(t))}{d_{1,3}^3} \right)$	$m_2 \ddot{z}_2 = G \left(\frac{m_1 (z_1(t) - z_2(t))}{d_{1,2}^3} + \frac{m_3 (-z_2(t) + z_3(t))}{d_{2,3}^3} \right)$	$m_3 \ddot{z}_3 = G \left(\frac{m_1 (z_1(t) - z_3(t))}{d_{1,3}^3} + \frac{m_2 (z_2(t) - z_3(t))}{d_{2,3}^3} \right)$

$$d_{1,2} = \sqrt{(x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2 + (z_2(t) - z_1(t))^2}$$

$$d_{1,3} = \sqrt{(x_3(t) - x_1(t))^2 + (y_3(t) - y_1(t))^2 + (z_3(t) - z_1(t))^2}$$

$$d_{2,3} = \sqrt{(x_3(t) - x_2(t))^2 + (y_3(t) - y_2(t))^2 + (z_3(t) - z_2(t))^2}$$



(drag dots and arrows to change initial conditions)

A equação de movimento de um corpo $i = 3$ de massa pequena m no campo de dois outros corpos massivos $i = 1, 2$ é, usando as posições relativas $\vec{R}_{3i} = \vec{r}_3 - \vec{r}_i$,

$$m \frac{d^2 \vec{R}_{31}}{dt^2} = \vec{F}_{31} + \vec{f}_{32} \quad ; \quad m \frac{d^2 \vec{R}_{32}}{dt^2} = \vec{F}_{32} + \vec{f}_{31}$$

A esfera de influência do corpo $i = 2$ é a superfície centrada nesse corpo em que se verifica

$$\frac{|\vec{F}_{31}|}{|\vec{f}_{32}|} = \frac{|\vec{F}_{32}|}{|\vec{f}_{31}|}$$

Na prática quando $|\vec{R}_{32}| \ll |\vec{R}_{31}|$

$$R_{e2} \approx \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{2/5} R_{21}$$

Planeta	Mercúrio	Venus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Uranos	Neptuno	Plutão
Raio da Esfera de Influência (Km)	112000.	615000.	925000.	579000.	4.81×10^7	5.46×10^7	5.2×10^7	8.69×10^7	3.2×10^6

O problema 3 corpos circular restrito

O problema geral de 3 corpos é restrito se considerarmos que dois desses corpos são massivos e têm órbitas circulares em torno do seu Centro de Massa e atraem, sem serem afectados por isso, um terceiro corpo de massa desprezável. O problema consiste em determinar as trajectórias desta terceira massa infinitesimal.

O problema inicial que envolvia 9 equações diferenciais de 2ª ordem (dimensão = 18) passa agora para um problema de 3 equações diferenciais de 2ª ordem (dimensão = 6).

Se o terceiro corpo ficar restrito a deslocar-se no plano orbital dos outros dois (problema circular restrito coplanar) reduz-se o problema a apenas 2 equações de 2ª ordem (dimensão = 4).

O integral de Jacobi

No problema circular restrito Jacobi obteve primeiro uma constante de movimento que, no referencial rotativo de massa reduzida dos dois corpos massivos se escreve (o eixo \vec{e}_x coincide com a linha que passa pelos dois corpos massivos, \vec{e}_y está no seu plano de movimento)

$$C = 2U - V^2$$

$$\text{onde } U(\vec{r}) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U_1(r_1) + U_2(r_2) \text{ e } V^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

O Critério de Tisserand

O integral de Jacobi é frequentemente utilizado para determinar se dois objectos observados antes e depois de uma interacção com um astro massivo, calculando a constante C a partir de elementos orbitais dos dois objectos. Por exemplo, o encontro de um cometa com Júpiter pode causar uma alteração drástica dos seus elementos orbitais, e a menos que estivesse a ser seguido pode não ser fácil identificá-lo depois como o mesmo objecto observado antes do encontro. Se a constante C dos dois objectos fôr a mesma é provável que seja o

mesmo cometa. Designando por φ a inclinação do plano orbital do cometa, a o semi-eixo e e a excentricidade da órbita do cometa pode-se mostrar que

$$C \simeq 2 \sqrt{a(1-e^2)} \cos(\varphi) + \frac{1}{a}$$

Superfícies de Hill

Para cada valor de C a definição do integral de Jacobi define uma superfície limite dentro da qual a massa desprezável se deve encontrar porque a sua velocidade não pode ser imaginária.

$$C = 2U - V^2 \Rightarrow V^2 = 2U - C \geq 0 \Leftrightarrow U(\vec{r}) > \frac{C}{2}$$

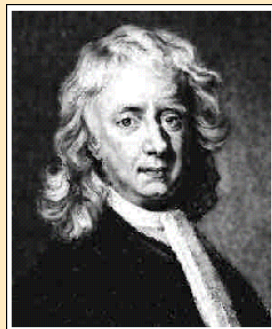
Ref: Orbital Motion A. E. Roy, IoP'78

Dinâmica de dois corpos

As Leis de Kepler e as Equações de Movimento

Kepler (1571-1630)

Newton (1643-1727)



I) Os planetas descrevem **órbitas elípticas**, com o Sol num dos **focos**.

II) A velocidade areolar A relativa ao Sol é **constante** (Lei das Áreas) \Leftrightarrow (Conservação do Momento Angular).

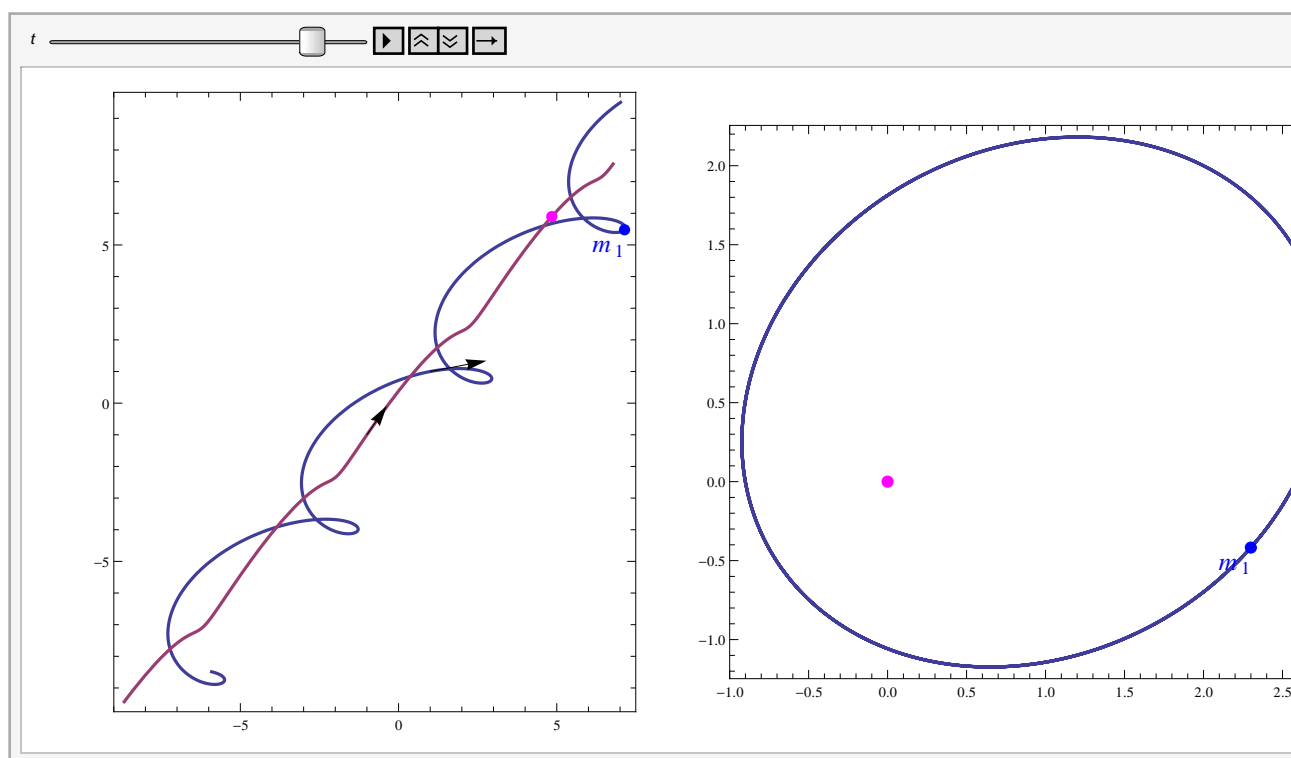
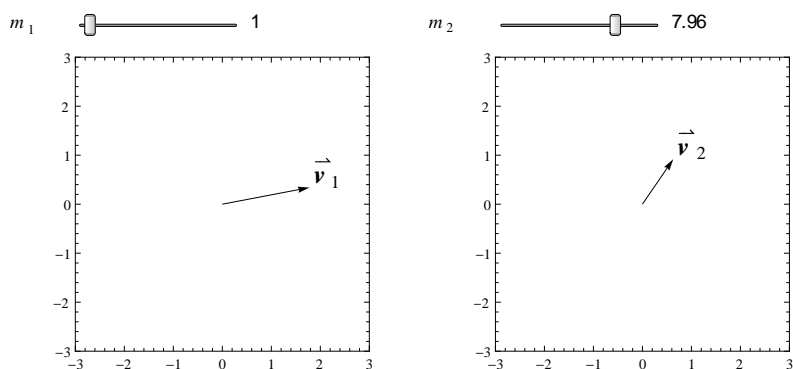
$$(3-12) \quad d\tilde{A} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{r}}_1 \times d\tilde{\mathbf{r}}_1 \implies \frac{d\tilde{A}}{dt} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{r}}_1 \times \tilde{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{2\mu} \tilde{\mathbf{L}} = \text{constante}$$

III) O **quadrado do período** de revolução T é proporcional ao **cubo da distância média** ao Sol:

$$(3-13) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \langle R \rangle^3$$

(rigorosamente deve-se substituir $\langle R \rangle^3$ pelo semi-eixo a^3 .)

$$\begin{cases} \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{\kappa}{m_1} \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{\kappa}{m_2} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\kappa}{\mu} \frac{1}{r^3} \vec{r} \end{cases}$$



Constantes de Movimento

No problema de dois corpos o espaço de fase é $\mathbb{P} = T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, portanto de dimensão $d_{\mathbb{P}} = 12$. Como é sabido existem as seguintes constantes de movimento, onde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ e $k = G m_1 m_2 = G M \mu$, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ e $\vec{p} = \mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$:

■ **Momento Linear Total**

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

■ **Momento Angular Total**

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

■ **Momento Angular Reduzido**

$$\vec{L}_\mu = \vec{r} \times \vec{p} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

■ **Vector de Runge-Laplace-Lenz**

$$\vec{K} = \vec{p} \times \vec{L}_\mu - \frac{\mu k}{r} \vec{r}$$

■ **Energia Total**

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2m_1} p_1^2 + \frac{1}{2m_2} p_2^2 - \frac{k}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

■ **Energia Reduzida**

$$\mathcal{E}_\mu = \frac{1}{2\mu} p^2 - \frac{k}{r}$$

Isto representa um total de 14 constantes de movimento, mas não são todas independentes. Para além da óbvia dependência entre \mathcal{E} e \mathcal{E}_μ e $P^2 = \vec{P} \cdot \vec{P}$, existem duas relações escalares adicionais entre \vec{L}_μ e \vec{K} :

O plano de Laplace e o Vector de Runge-Lenz

Colisão 3D

Resta fazer notar que no plano de Laplace, a direcção de $\vec{u}_1 - \vec{u}_o$ é colinear com a direcção especificada pelo vector de Ruge-Lenz-Laplace. Vamos começar por mostrar que $\vec{u}_1 - \vec{u}_o$ é a bissetriz do ângulo formado pelas velocidades assintóticas $-\vec{U}_o = -(\vec{u}_o - \vec{v}_o)$ e $\vec{U}_1 = \vec{u}_1 - \vec{v}_1$. De facto

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1 - \vec{u}_o) \times (\vec{u}_1 - \vec{v}_1) &= (\vec{u}_1 - \vec{u}_o) \times \vec{u}_1 + \frac{m_1}{m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_o) \times \vec{v}_1 = -\vec{u}_o \times \vec{u}_1 - \frac{m_1}{m_2} \vec{v}_o \times \vec{v}_1 \\ -(\vec{u}_o - \vec{v}_o) \times (\vec{u}_1 - \vec{u}_o) &= -\vec{u}_o \times (\vec{u}_1 - \vec{u}_o) - \frac{m_1}{m_2} \vec{v}_o \times (\vec{v}_1 - \vec{v}_o) = -\vec{u}_o \times \vec{u}_1 - \frac{m_1}{m_2} \vec{v}_o \times \vec{v}_1 \end{aligned}$$

mostrando assim que não só $\vec{u}_1 - \vec{v}_1$ pertence ao mesmo plano que $\vec{u}_1 - \vec{u}_o$ e $\vec{u}_o - \vec{v}_o$, como faz o mesmo ângulo θ com $\vec{u}_1 - \vec{u}_o$ que $\vec{v}_o - \vec{u}_o$ faz com $\vec{u}_1 - \vec{u}_o$. Mostramos a seguir que \vec{K} também tem a mesma propriedade, i.e.

$$\begin{aligned} \mu(\vec{u}_1 - \vec{v}_1) \times \vec{K} &= \vec{p}_1 \times \left(\vec{p}_1 \times \vec{L}_\mu - \frac{\mu k}{r_1} \vec{r}_1 \right) = \vec{p}_1^2 \vec{L}_\mu \\ -\mu \vec{K} \times (\vec{u}_o - \vec{v}_o) &= \vec{p}_o \times \left(\vec{p}_o \times \vec{L}_\mu - \frac{\mu k}{r_o} \vec{r}_o \right) = \vec{p}_o^2 \vec{L}_\mu \end{aligned}$$

Por conservação de Energia tem-se que $\vec{p}_1^2 = \vec{p}_o^2$ no caso das velocidades assintóticas. Como \vec{K} também está no mesmo plano de Laplace que \vec{U}_o e \vec{U}_1 e $\vec{u}_1 - \vec{u}_o$, conclui-se que $\vec{K} \propto (\vec{u}_1 - \vec{u}_o)$.

Relações entre constantes

$$\vec{L}_\mu \cdot \vec{K} = 0$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\mu + \frac{1}{2M} P^2$$

$$K^2 = 2\mu L_\mu^2 \mathcal{E}_\mu + \mu^2 k^2$$

No total existem assim 11 constantes de movimento independentes que determinam o movimento como uma sub-variedade unidimensional de \mathbb{P} .

■ Plano de Laplace: movimento no plano perpendicular a \vec{L}_μ

$$\vec{r} \cdot \vec{L}_\mu = 0 \quad \vec{v} \cdot \vec{L}_\mu = 0$$

Por outro lado o movimento descrito no referencial de massa reduzida por \vec{r} restringe-se a um plano perpendicular a \vec{L}_μ (plano de Laplace), e o ângulo θ entre \vec{r} e \vec{K} permite parametrizar a trajectória através de $\vec{r} \cdot \vec{K} = \vec{r} \cdot (\vec{p} \times \vec{L}_\mu) - \mu k r = L_\mu^2 - \mu k r = K r \cos[\theta]$ donde se conclui que

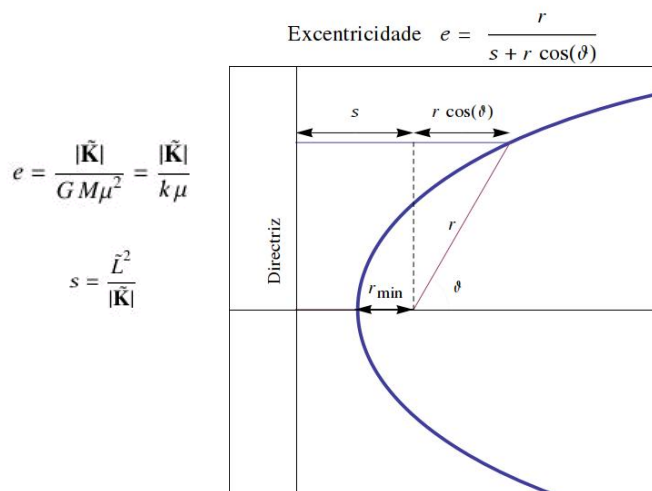
■ Eixo da trajectória definido por \vec{K} e θ ângulo entre \vec{r} e \vec{K}

$$\vec{r} \cdot \vec{K} = K r \cos[\theta] = L_\mu^2 - \mu k r$$

$$r = \frac{L_\mu^2}{\mu k + K \cos[\theta]} = \frac{s e}{1 + e \cos[\theta]}$$

A excentricidade da órbita é assim definida por $e = \frac{K}{\mu k}$ e a distância focal $s = \frac{L_\mu^2}{K}$. Note-se portanto que o vector de Runge-Laplace-Lenz \vec{K} define o eixo da trajectória no plano de Laplace.

■ Excentricidade e e Distância Focal s

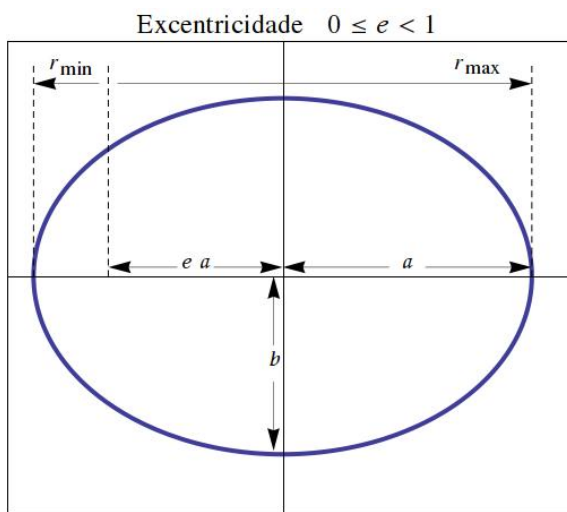


Parâmetros Orbitais

$$\tilde{E} = \left(\frac{e^2 - 1}{2es} \right) k; \quad \tilde{L}^2 = esk\mu; \quad |\tilde{\mathbf{K}}| = ek\mu$$

$$\begin{cases} \tilde{E} > 0 \Rightarrow \frac{GM\mu^2}{|\tilde{\mathbf{K}}|} < 1 \quad (\text{ou } e > 1) \text{ Órbita Hiperbólica com } \tilde{r}_1(\theta_\infty) = \infty \text{ e } \theta_\infty = \cos^{-1} \left(-\frac{1}{e} \right) \\ \tilde{E} = 0 \Rightarrow \frac{GM\mu^2}{|\tilde{\mathbf{K}}|} = 1 \quad (\text{ou } e = 1) \text{ Órbita Parabólica com } \tilde{r}_1(\pi) = \infty \\ \tilde{E} < 0 \Rightarrow \frac{GM\mu^2}{|\tilde{\mathbf{K}}|} > 1 \quad (\text{ou } e < 1) \text{ Órbita Elíptica com } \tilde{r}_{min} \leq \tilde{r}_1(\theta) \leq \tilde{r}_{max} \end{cases}$$

■ Órbitas Elípticas



- Distâncias mínima (Perigeu) e máxima (Apogeu)

$$\begin{cases} \tilde{r}_{min} = \tilde{r}(0) = \frac{\tilde{L}^2}{|\tilde{\mathbf{K}}| + GM\mu^2} = \frac{es}{1+e} \\ \tilde{r}_{max} = \tilde{r}(\pi) = \frac{\tilde{L}^2}{GM\mu^2 - |\tilde{\mathbf{K}}|} = \frac{es}{1-e} \end{cases}$$

- Semi-eixo maior

$$a = \frac{1}{2} (\tilde{r}_{min} + \tilde{r}_{max}) = \frac{es}{1-e^2}$$

- Semi-eixo menor

$$b = a \sqrt{1-e^2} = \frac{es}{\sqrt{1-e^2}}$$

- Distância Foco-Centro

$$a - \tilde{r}_{min} = ea$$

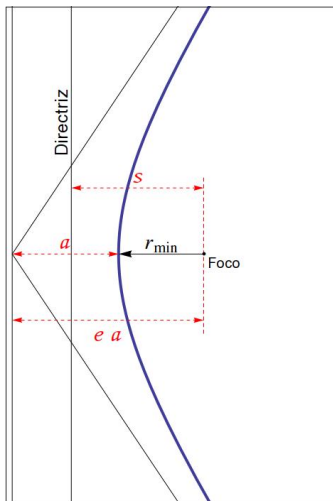
■ Energia Reduzida

$$\mathcal{E}_\mu = \frac{k}{2a}$$

■ Período T

$$L = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad ; \quad t = \frac{\mu}{L} \int \left(\frac{es}{1 - e \cos(\gamma - \theta)} \right)^2 d\theta \quad ; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k} \left(\frac{es}{1 - e^2} \right)^{3/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k} \left(\frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} \right)^{3/2}}$$

■ Órbitas Hiperbólicas



■ Distância mínima (Perigeu)

$$r_{\min} = \frac{es}{e+1}$$

■ Semi-eixo maior

$$a = \frac{es}{e^2 - 1} = \frac{r_{\min}}{e - 1}$$

■ Distância Foco-Centro

$$r_{\min} + a = ae$$

■ Energia Reduzida

$$\mathcal{E}_\mu = \frac{k}{2a}$$

■ Tempo de chegada numa órbita hiperbólica

$$\Delta \mathcal{A}(0, \theta_o) = \int_0^{\theta_o} \frac{es}{e \cos(\theta) + 1} d\theta = \frac{(2es) \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tanh\left(\frac{\theta_o}{2}\right) \right)}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{L_\mu}{2\mu} \Rightarrow$$

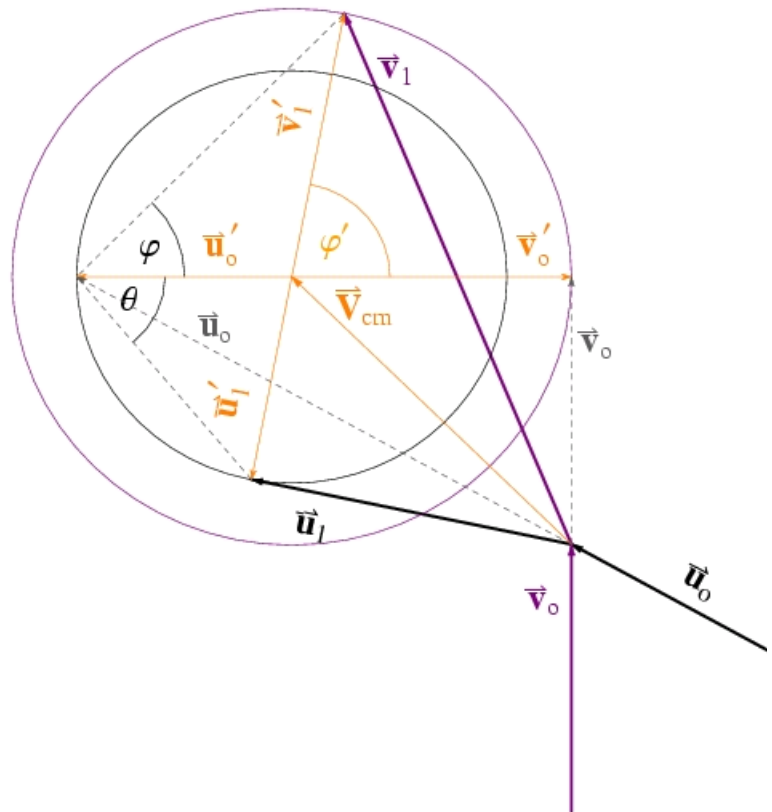
$$\Delta t = \frac{2 \mu \Delta \mathcal{A}(0, \theta_o)}{L_\mu} = 2 \sqrt{\frac{\mu a}{k}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tan \left(\frac{\theta_o}{2} \right) \right)$$

Colisões binárias elásticas

Geometria parametrizada de binary elastic collisions Ricada Silvã and Lemos- 2006

■ **Referenciais de Laboratório e CM**

$\vec{v}'_o = -\frac{m_2}{m_1} \vec{u}'_o \quad ; \quad \vec{v}'_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{u}'_1,$	$\ \vec{v}'_o\ = \ \vec{v}'_1\ \quad ; \quad \ \vec{u}'_o\ = \ \vec{u}'_1\ $
--	---



Colisão Elástica com um corpo inicialmente em repouso

■ **Leis de Conservação**

- Conservação de Momento linear
- Conservação de Energia Cinética

$m_1 \vec{v}_o = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{u}_1 ;$ $\frac{1}{2} m_1 v_o^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_1^2 ,$	\iff	$\frac{m_1}{m_2} (\vec{v}_o - \vec{v}_1) = \vec{u}_1 ;$ $\frac{m_1}{m_2} (\vec{v}_o - \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_o + \vec{v}_1) = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 .$
---	--------	---

■ **Velocidade de saída \vec{u}_1**

$$\vec{u}_1 \cdot (\vec{v}_o + \vec{v}_1) = \vec{u}_1 \cdot \left(\frac{m_1}{m_2} (\vec{v}_o - \vec{v}_1) \right) \implies \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_o \cdot \vec{u}_1$$

$\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_o \cdot \vec{u}_1 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1$	$\vec{d} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_o = 2\vec{V}_{\text{cm}}$
--	---

$$\vec{d} \cdot \vec{u}_1 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 \implies (\vec{d} - \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_1 = 0$$

■ **Velocidade de saída \vec{v}_1**

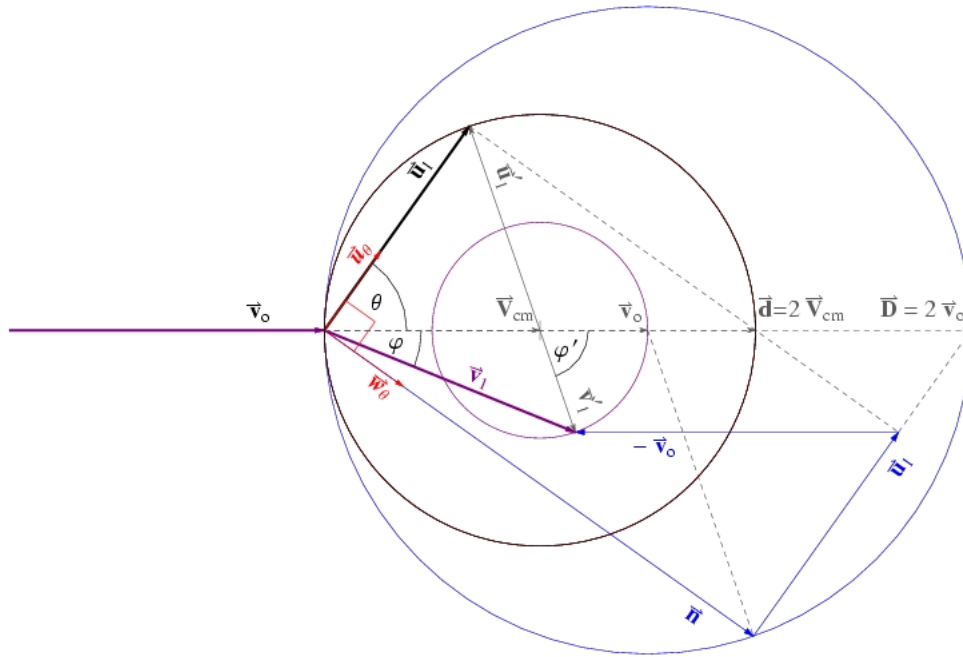
$$\vec{u}_1 \cdot (\vec{v}_o + \vec{v}_1 - \vec{u}_1) = 0 \implies \vec{u}_1 \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{n} = \vec{v}_o + \vec{v}_1 - \vec{u}_1 \implies \vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{v}_o + \vec{n}$$

$$\frac{m_1}{m_2} \vec{n} \cdot (\vec{v}_o - \vec{v}_1) = 0 \implies \vec{n} \cdot (2\vec{v}_o - \vec{n}) = 0$$

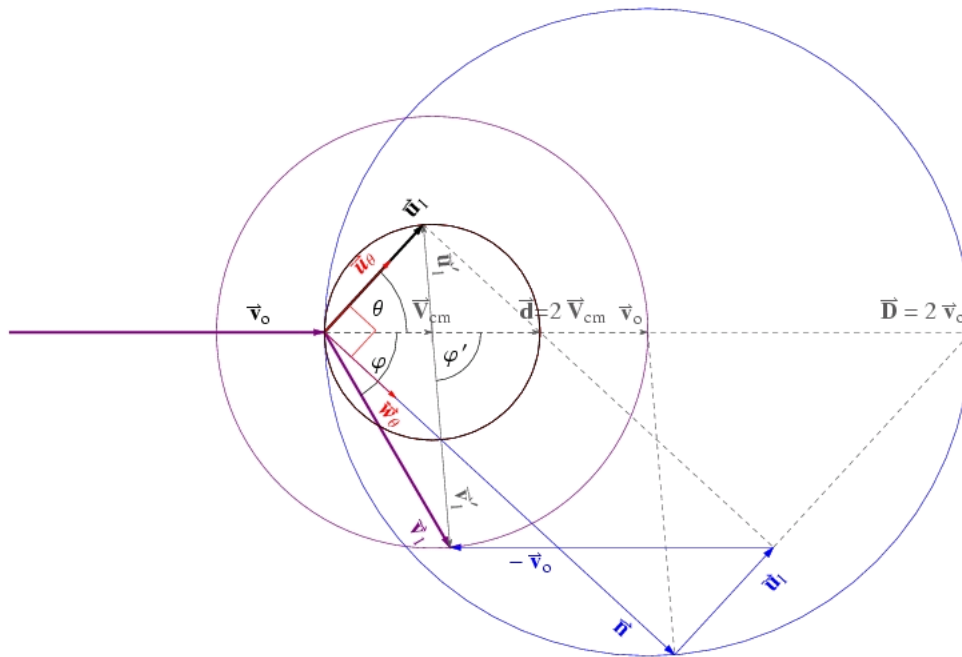
■ **Caso $m_1 > m_2$**

$\vec{u}_1 = d \cos(\theta) \vec{u}_\theta$	$\vec{n} = 2 v_o \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{w}_\theta = 2 v_o \sin(\theta) \vec{w}_\theta$
$\vec{v}_1 = v_o \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cos(\theta) \hat{u}_\theta + \sin(\theta) \hat{w}_\theta \right]$	$\vec{v}_o = v_o (\cos(\theta) \vec{u}_\theta + \sin(\theta) \vec{w}_\theta)$



■ Caso $m_1 = m_2$

$\hat{\mathbf{u}}_1 = d \cos(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta$	$\hat{\mathbf{n}} = 2 v_o \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \hat{\mathbf{w}}_\theta = 2 v_o \sin(\theta) \hat{\mathbf{w}}_\theta$
$\vec{\mathbf{v}}_1 = v_o \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cos(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta + \sin(\theta) \hat{\mathbf{w}}_\theta \right]$	$\vec{\mathbf{v}}_o = v_o (\cos(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta + \sin(\theta) \hat{\mathbf{w}}_\theta)$



■ Relação entre os Ângulos de dispersão

Conhecido θ

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_0}{v_1 v_0} = \frac{1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cos^2(\theta)}{\sqrt{1 - \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2(\theta)}}$$

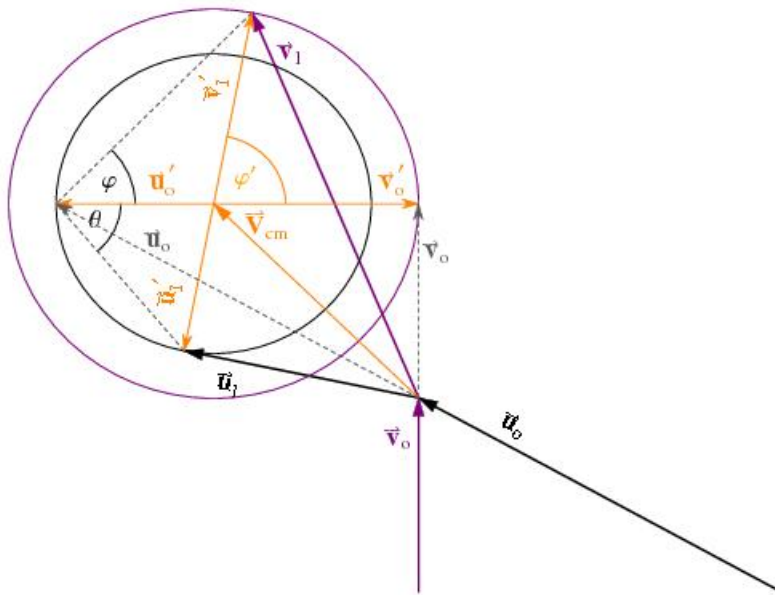
Conhecido φ

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{m_1}{m_2} \sin^2(\varphi) \pm \cos(\varphi) \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2(\varphi)} \right]$$

Relação com o ângulo de dispersão φ' no referencial CM

$$\tan(\varphi) = \frac{v_1' \sin(\varphi')}{V_{\text{cm}} + v_1' \cos(\varphi')} = \frac{m_2 \sin(\varphi')}{m_1 + m_2 \cos(\varphi')}$$

$$\tan(\theta) = \frac{u_1' \sin(\varphi')}{V_{\text{cm}} - u_1' \cos(\varphi')} = \frac{\sin(\varphi')}{1 - \cos(\varphi')}$$



Colisão Elástica com dois corpos em movimento

• Leis de Conservação

Conservação de Momento linear

Conservação de Energia Cinética

$$\frac{m_1}{m_2}(\vec{v}_0 - \vec{v}_1) = \vec{u}_1 - \vec{u}_0;$$

$$\frac{m_1}{m_2}(\vec{v}_0 - \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) = (\vec{u}_1 - \vec{u}_0) \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_0)$$

■ Relações de ortogonalidade

$$\vec{d} = 2(\vec{V}_{cm} - \vec{u}_0) = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v}_0 - \vec{u}_0) \quad \left| \quad \vec{n} = (\vec{v}_0 - \vec{u}_0) + \vec{v}_1 - \vec{u}_1 \quad \right| \quad (\vec{u}_1 - \vec{u}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

$(\vec{u}_1 - \vec{u}_0) \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_0 - \vec{d}) = 0$	$\vec{n} \cdot (2(\vec{v}_0 - \vec{u}_0) - \vec{n}) = 0$
---	--

■ Velocidades finais

$\vec{u}_1 = \vec{u}_0 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_0 - \vec{u}_0 \cos(\theta)\hat{u}_\theta$	$\vec{v}_1 = \vec{n} + \vec{u}_1 - (\vec{v}_0 - \vec{u}_0)$
---	---

■ Circunferências de resultados

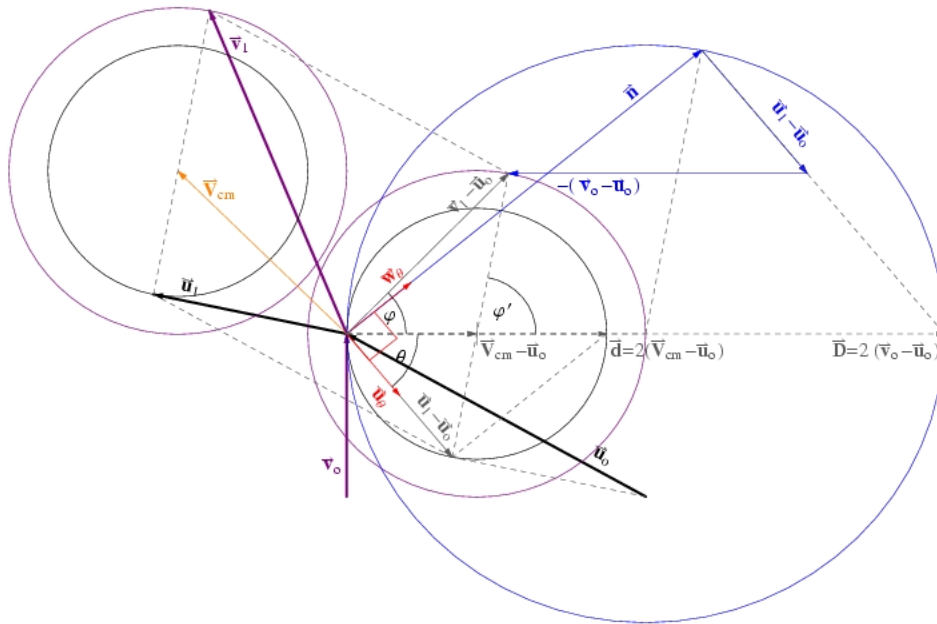
$$r_u = |\vec{u}_1 - \vec{V}_{cm}| = \frac{m_1}{m_1 + m_2}|\vec{v}_0 - \vec{u}_0|$$

$$r_v = |\vec{v}_1 - \vec{V}_{cm}| = \frac{m_2}{m_1 + m_2}|\vec{v}_0 - \vec{u}_0|$$

■ Caso limite $m_1 \gg m_2$

$r_u \rightarrow \vec{v}_0 - \vec{u}_0 $	$r_v \rightarrow 0$
---	---------------------

■ Caso $m_1 < m_2$



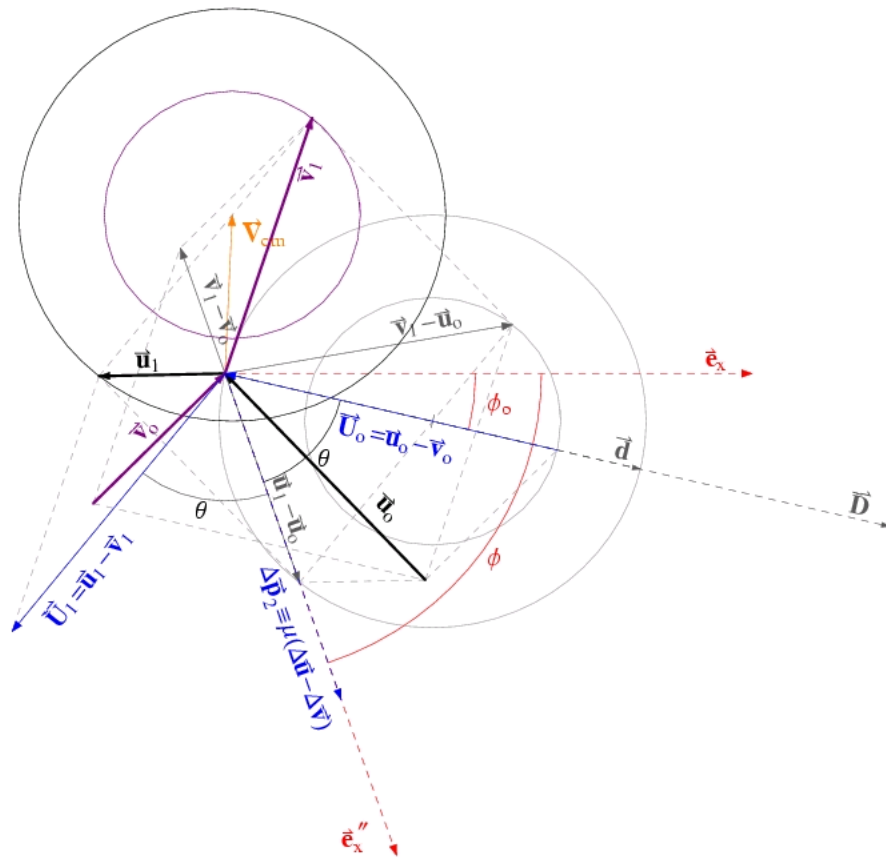
Manobras Gravitacionalmente Assistidas (Slingshot)

Binary collisions and the slingshot effect – Ricada Silva and Lemos – 2008

■ **Determinação dos Parâmetros No referencial de Massa Reduzida**

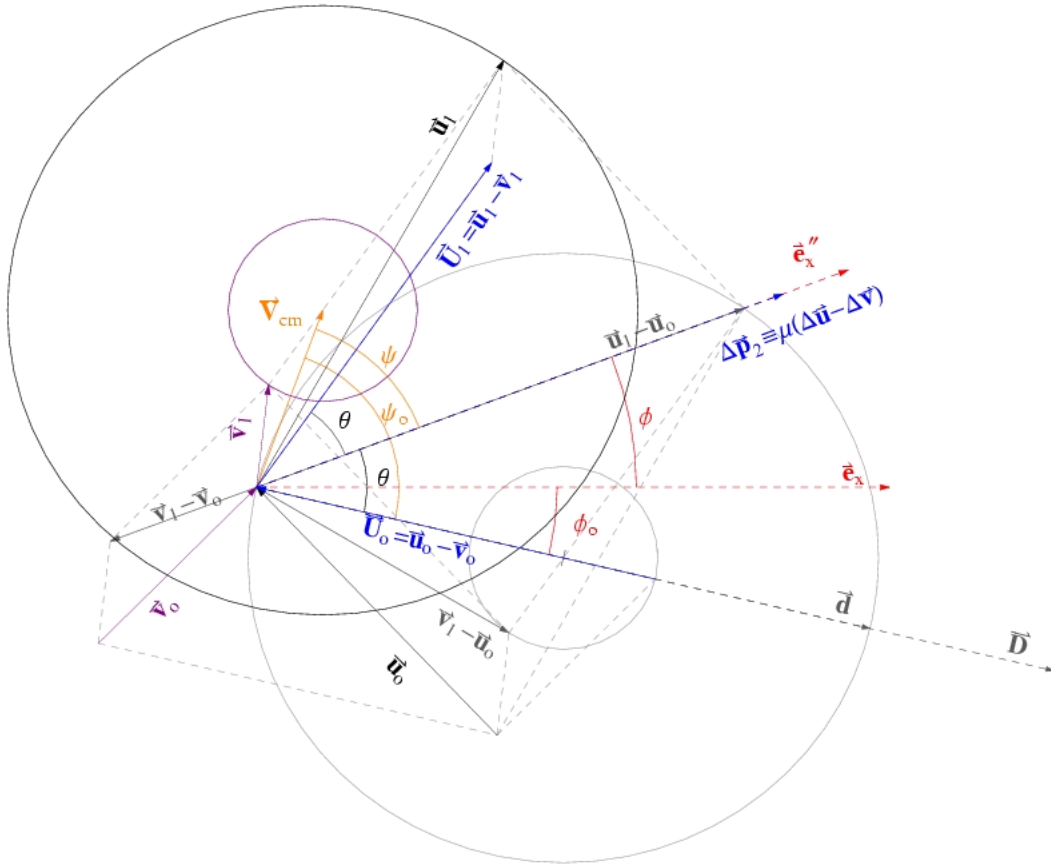
Mudança de eixos entre referencial laboratório e referencial de massa reduzida (MR)

$$\dot{\vec{r}} = \mathbb{A} \cdot \dot{\vec{r}}'' \quad \text{onde} \quad \mathbb{A}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Determinação do eixo \vec{e}_x'' da trajectória no referencial (MR)

$\mathbb{A} \cdot \vec{u}_0'' = \vec{U}_0 = \vec{u}_0 - \vec{v}_0$	$\mathbb{A} \cdot \vec{u}_1'' = \vec{U}_1 = \vec{u}_1 - \vec{v}_1$
--	--

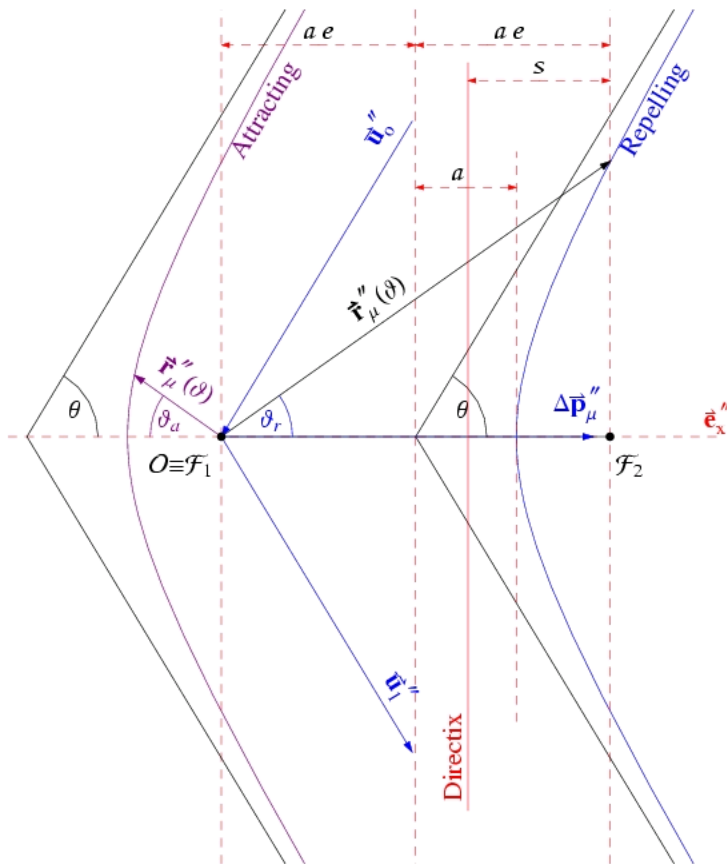


$$\mathbb{A} \cdot \Delta \hat{\mathbf{p}}_{\mu}'' = \mu \mathbb{A} \cdot (\hat{\mathbf{u}}_1'' - \hat{\mathbf{u}}_0'') = \mu (\hat{\mathbf{u}}_1 - \hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{v}}_0 - \hat{\mathbf{v}}_1)$$

$$\mathbb{A} \cdot \Delta \hat{\mathbf{p}}_{\mu}'' = \mu (\Delta \hat{\mathbf{u}} - \Delta \hat{\mathbf{v}}) = m_2 (\hat{\mathbf{u}}_1 - \hat{\mathbf{u}}_0) = \Delta \hat{\mathbf{p}}_2$$

■ Parâmetros Orbitais no caso Hiperbólico

Excentricidade	Energia	Mom. Angular	Pa.
$\vartheta_{-\infty} = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$	$\mathcal{E}_o'' = \frac{1}{2} \mu \hat{\mathbf{u}}_o'' ^2$	$\mathcal{L}''^2 = \frac{\kappa^2 (e^2 - 1)}{ \hat{\mathbf{u}}_o'' ^2} = \frac{\kappa^2 \tan^2(\theta)}{ \hat{\mathbf{u}}_o'' ^2}$	$b^2 =$



Distância Focal	Distância Centro-Foco
$s = \frac{\kappa (e^2 - 1)}{e \mu \dot{\mathbf{u}}_0'' ^2} = \frac{\kappa \sin(\theta) \tan(\theta)}{\mu \dot{\mathbf{u}}_0'' ^2}$	$ae = \frac{e \kappa}{\mu \dot{\mathbf{u}}_0'' ^2} = \frac{\kappa \sec(\theta)}{\mu \dot{\mathbf{u}}_0'' ^2}$

$\vartheta_{-\infty} = \tan^{-1}(-\dot{\mathbf{u}}_0'') = \theta$	$\vartheta_r \in [\vartheta_{-\infty}, -\vartheta_{-\infty}]$	$\vartheta_a \in [\pi - \vartheta_{-\infty}, 2\pi - \vartheta_{-\infty}]$
---	---	---

■ **Equações de trajetória ((+) Atractivo (-) Repulsivo)**

$r(\vartheta) = \frac{es}{1 + e \cos(\gamma \pm \vartheta)}$	$t(\vartheta) = \left(\frac{es}{e^2 - 1}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{\mu}{\kappa}} \left(2 \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \pm \sqrt{e^2 - 1} \frac{e \sin(\vartheta)}{1 \pm e \cos(\vartheta)} \right)$
--	--

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_1(t) = \dot{\mathbf{R}}_{\text{cm}_0} + \dot{\mathbf{V}}_{\text{cm}} t + \frac{m_2}{M} \mathbb{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\mu''(t) \\ \dot{\mathbf{r}}_2(t) = \dot{\mathbf{R}}_{\text{cm}_0} + \dot{\mathbf{V}}_{\text{cm}} t - \frac{m_1}{M} \mathbb{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\mu''(t) \end{cases}$$

■ **Ganho em velocidade**

$$\|\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_0\|^2 = \dot{\mathbf{d}} \cdot (\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_0) \quad \text{usando} \quad \dot{\mathbf{d}} = 2(\dot{\mathbf{V}}_{\text{cm}} - \dot{\mathbf{u}}_0) = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (\dot{\mathbf{v}}_0 - \dot{\mathbf{u}}_0)$$

$$u_1^2 = u_o^2 + 2 V_{cm} \|\vec{\mathbf{u}}_1 - \vec{\mathbf{u}}_o\| \cos(\psi) \quad \text{usando} \quad \|\vec{\mathbf{u}}_1 - \vec{\mathbf{u}}_o\| = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \|\vec{\mathbf{v}}_o - \vec{\mathbf{u}}_o\| \cos(\theta)$$

$$u_1^2 = u_o^2 + \frac{4m_1}{m_1 + m_2} V_{cm} \|\vec{\mathbf{v}}_o - \vec{\mathbf{u}}_o\| \cos(\psi) \cos(\theta)$$

■ Condição de Extremo sem constrangimentos

$$du_1^2 = \partial_\psi u_1^2 d\psi + \partial_\theta u_1^2 d\theta = (\partial_\theta u_1^2 - \partial_\psi u_1^2) d\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\psi) \cos(\theta) - \cos(\psi) \sin(\theta) = \sin(\psi - \theta) = 0$$

$$\theta = \frac{1}{2} \psi_o = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{\vec{\mathbf{V}}_{cm} \cdot \vec{\mathbf{U}}_o}{V_{cm} U_o} \right)$$

$$\vec{\mathbf{u}}_1^{sl_{max}} = \left(1 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\|\vec{\mathbf{u}}_o - \vec{\mathbf{v}}_o\|}{\|\vec{\mathbf{V}}_{cm}\|} \right) \vec{\mathbf{V}}_{cm} \quad ; \quad \vec{\mathbf{v}}_1^{sl_{min}} = \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\|\vec{\mathbf{u}}_o - \vec{\mathbf{v}}_o\|}{\|\vec{\mathbf{V}}_{cm}\|} \right) \vec{\mathbf{V}}_{cm}$$

Slingshot planetário

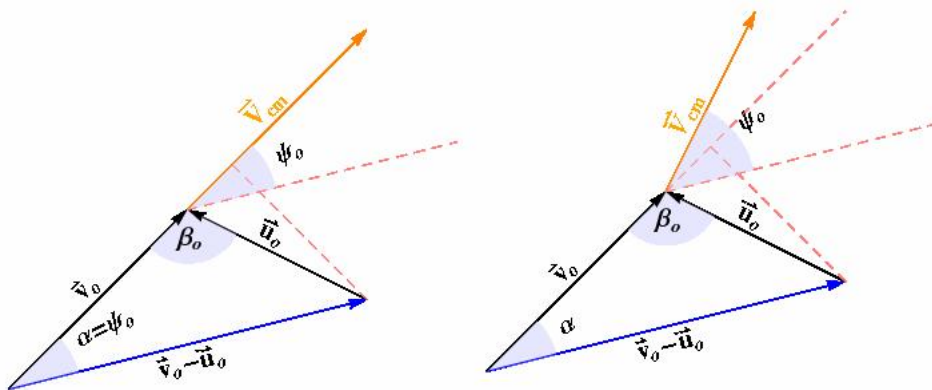
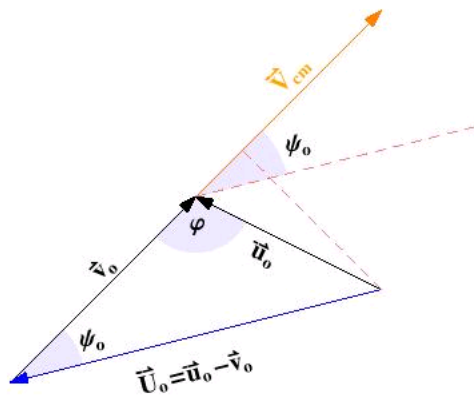
■ Parâmetros orbitais em função da Distância ao perigeu r_p

$$r_p = \frac{e s}{1 + e} \quad \begin{cases} a = \frac{e s}{e^2 - 1} \\ s = \frac{\mathcal{L}''}{\kappa \mu e} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad e = 1 + \frac{r_p}{a} \quad ; \quad a = \frac{\kappa}{2\mathcal{E}''}$$

■ Dependência de θ em r_p

$$\cos(\theta) = \frac{1}{1 + \frac{r_p}{a}} = \frac{1}{1 + \frac{\mu U_o^2}{\kappa / r_p}}$$

■ Casos $m_1 \gg m_2$ e $m_1 \approx m_2$



■ Equações que permitem eliminar $U_o = \|\vec{v}_o - \vec{u}_o\|$ e ψ_o de Δk_u ($m_1 \gg m_2$)

$$U_o \sin(\psi_o) = u_o \sin(\varphi)$$

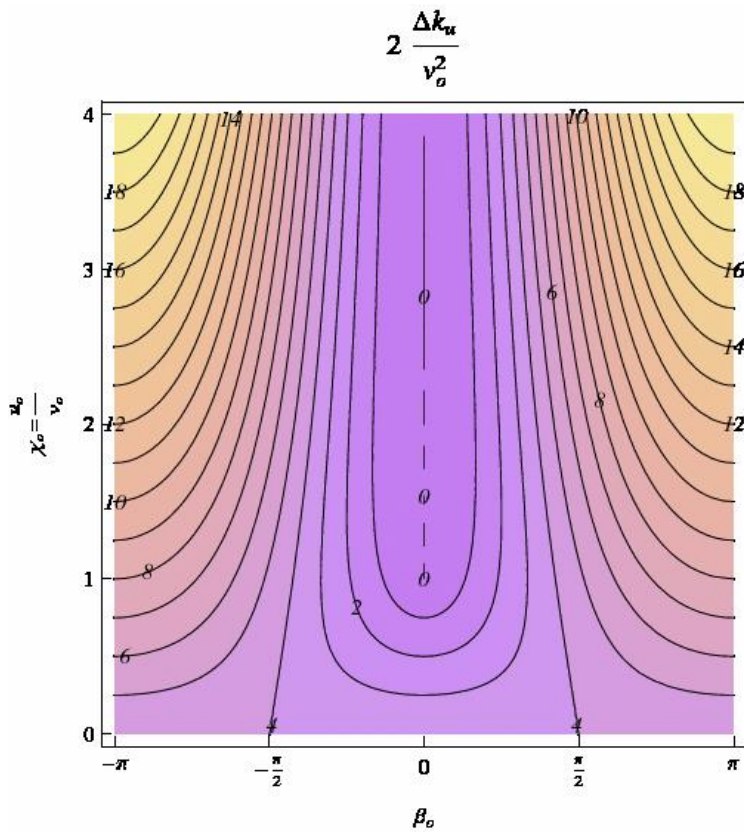
$$U_o \cos(\psi_o) = v_o - u_o \cos(\varphi)$$

■ Ganho máximo em termos de $\xi = u_o / v_o$

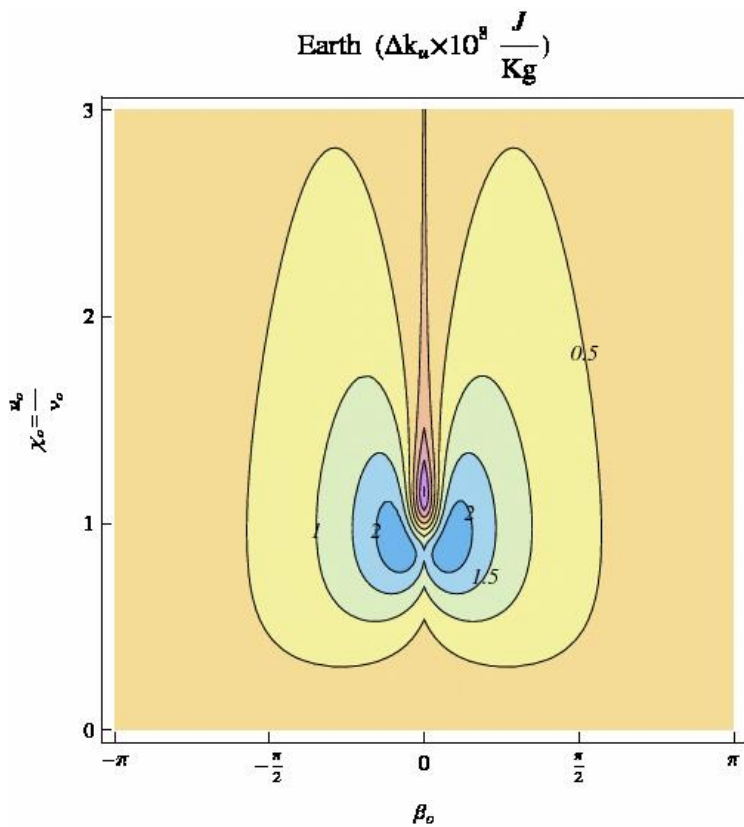
$$\Delta k_u = \frac{2\mu V_{cm} v_o}{m_2} \cos(\theta)^2 \left[1 - \frac{u_o}{v_o} \left(\cos(\varphi) - \sin(\varphi) \tan(\theta) \right) \right]$$

$$\Delta k_u = \frac{2\mu v_o^2}{m_2} \left[\frac{1 - \xi \left(\cos(\varphi) - \sin(\varphi) \sqrt{\left(1 + \frac{\mu v_o^2}{\kappa r_p} (\xi^2 - 2 \cos(\varphi) \xi + 1) \right)^2 - 1}}{\left(1 + \frac{\mu v_o^2}{\kappa r_p} (\xi^2 - 2 \cos(\varphi) \xi + 1) \right)^2} \right]$$

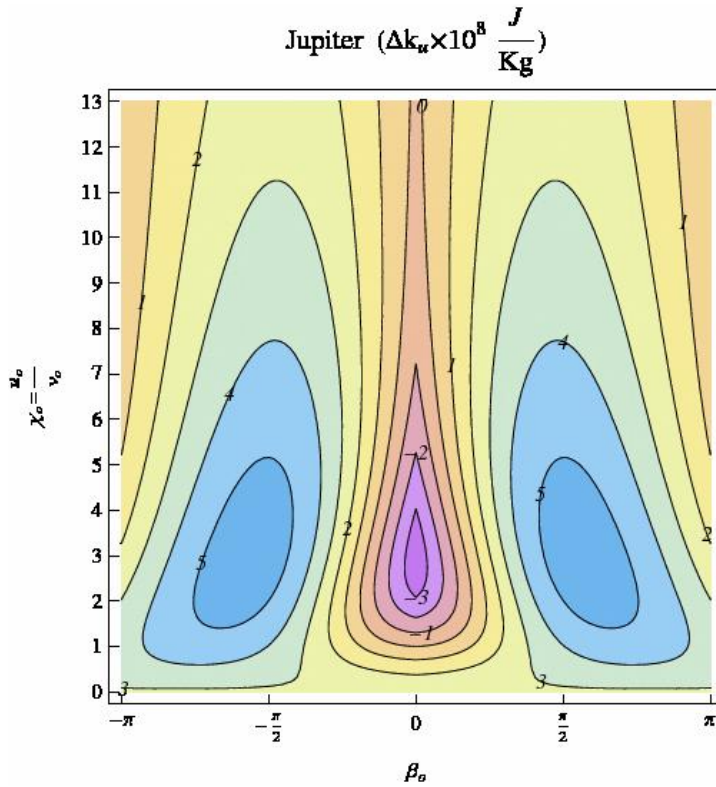
• Caso limite de astro muito massivo de raio desprezável



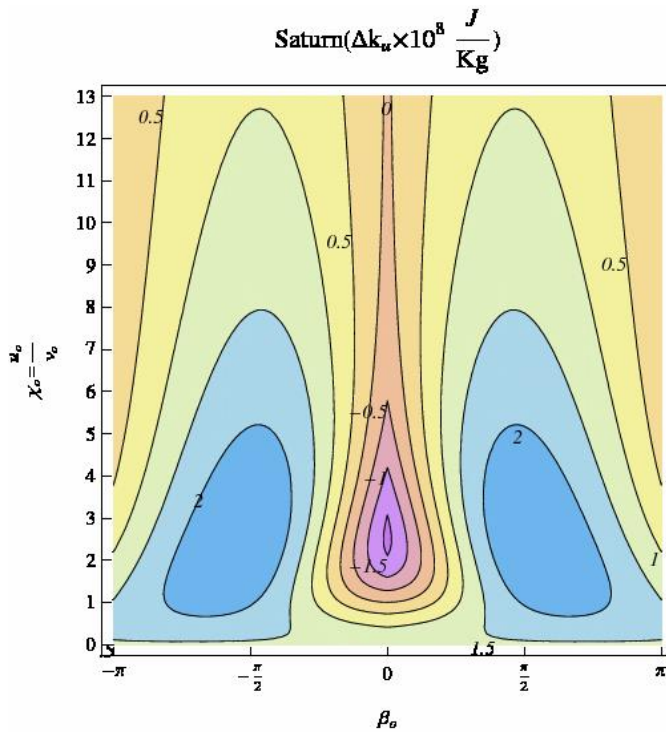
- *Ganho de energia por unidade de massa no caso limite de periapsis=raio do planeta.*



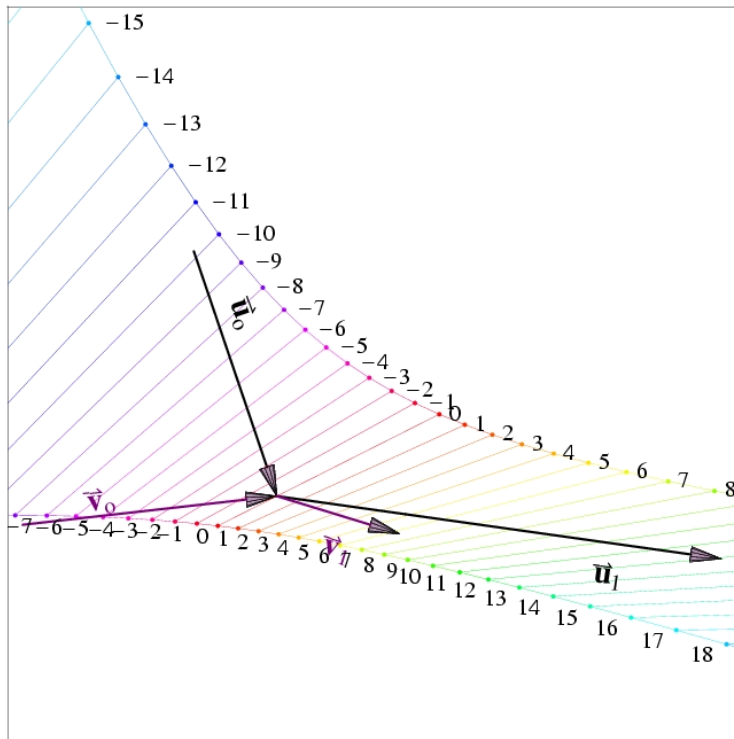
- Ganho de energia por unidade de massa no caso limite de periapsis=raio do planeta.



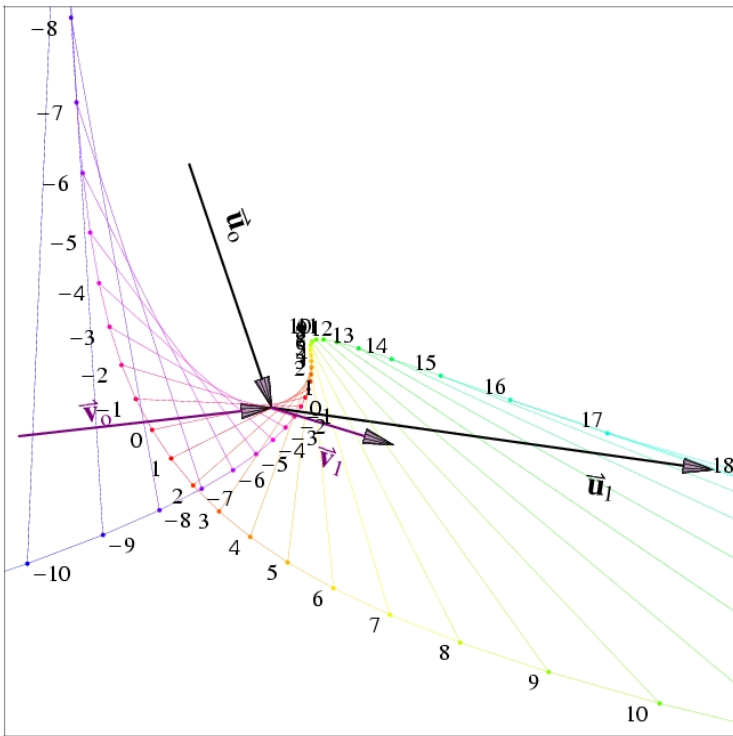
- Ganho de energia por unidade de massa no caso limite de periapsis=raio do planeta.



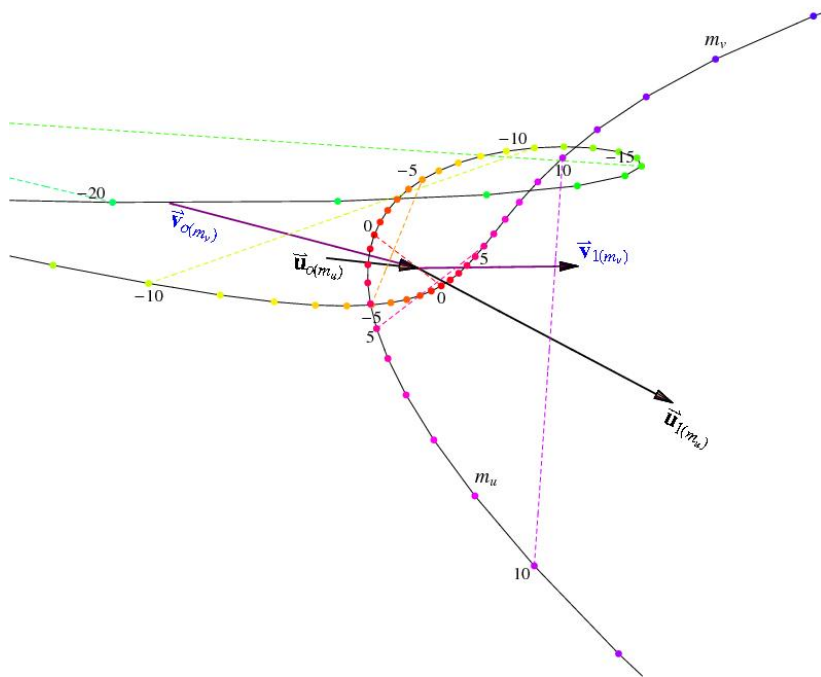
- *Slingshot para uma interacção repulsiva (Coulombiana)*



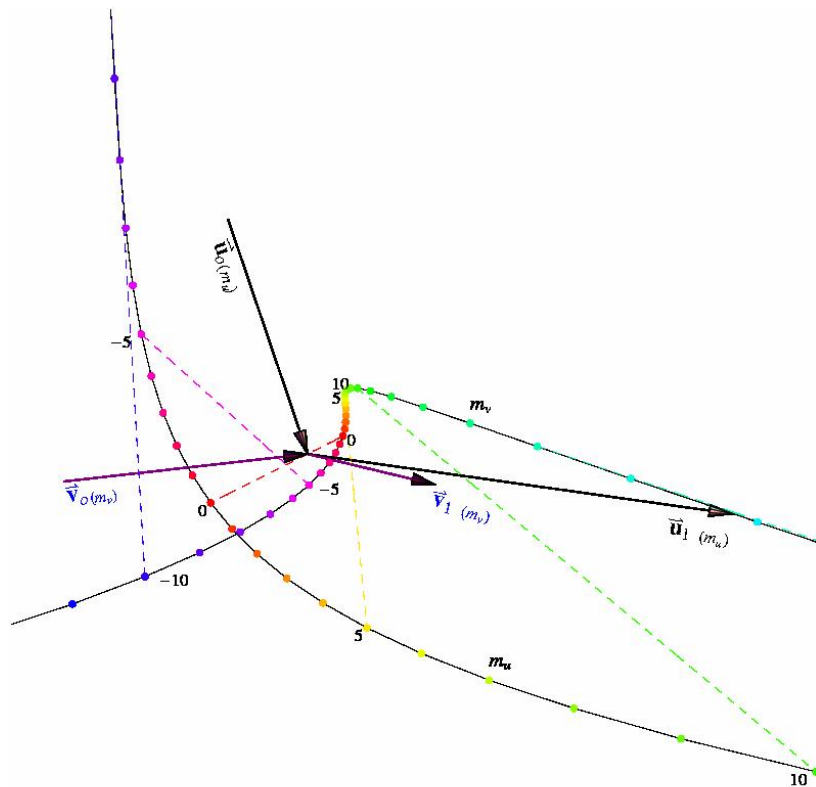
- *Slingshot para uma interacção atractiva (Coulombiana ou Gravítica)*



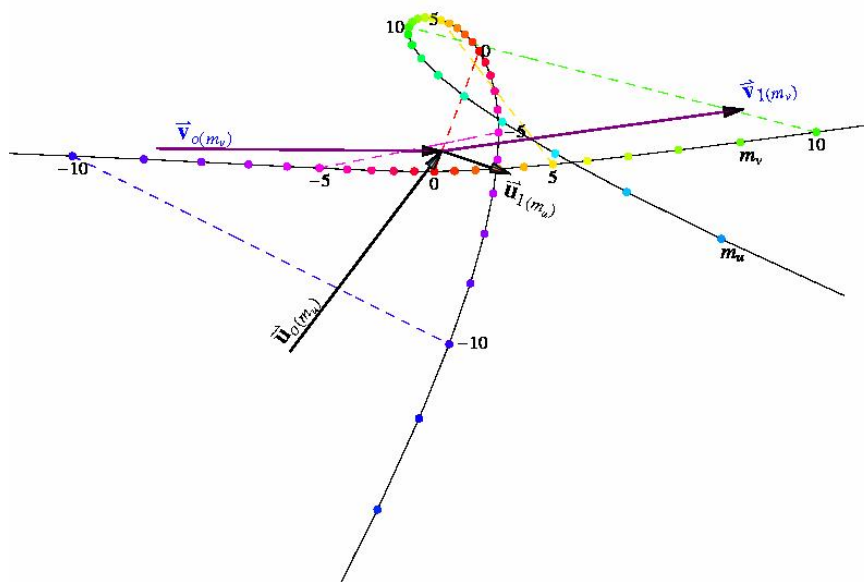
- Slingshot atractivo do corpo de massa m_u numa colisão com um corpo de massa $m_v \approx 2m_u$.



- *Slingshot quasi-máximo para o corpo de massa m_u numa colisão elástica com uma massa $m_v \approx 3 m_u$*



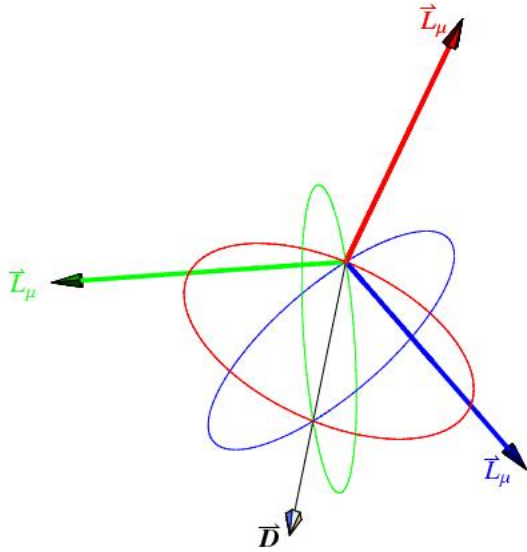
- *Travagem gravitacionalmente assistida do corpo de massa m_u por um corpo de massa $m_v \approx 5 m_u$*



O Caso Tridimensional Geral

Quando consideramos o problema de colisão assintótica de duas partículas pontuais de que apenas se conhecem as velocidades iniciais e massas em 3D, fica assim por definir o momento angular reduzido \vec{L}_μ e o vector de Lenz \vec{K} . Em duas dimensões, uma vez que a direcção de \vec{L}_μ e \vec{L} são fixas e as magnitudes de \vec{K} e \vec{L}_μ relacionam-se pelas expressões assintóticas, o espaço de fase é $P_2 = T^*(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ de dimensão $d_{P_2} = 8$, existem apenas 3 equações de conservação assintóticas (CML+CEC) para 4 incógnitas \vec{v}_1 e \vec{u}_1 . O ângulo θ que parametriza as direcções possíveis de saída de m_2 define igualmente a direcção do eixo da órbita no referencial de massa reduzida, ou seja define a direcção de \vec{K} no plano de Laplace.

No caso geral tridimensional, as mesmas equações (CML+CEC) assintoticamente definidas determinam 4 equações, mas agora há 6 incógnitas \vec{v}_1 e \vec{u}_1 , pelo que é de esperar a introdução de um novo ângulo ϕ para determinar o resultado da colisão. De facto, as relações derivadas no caso 2D entre as velocidades assintóticas e os vectores $\vec{d} = 2(\vec{V}_{cm} - \vec{u}_o)$, $\vec{D} = 2(\vec{v}_o - \vec{u}_o)$ permanecem válidas no caso 3D, excepto que agora o plano em que os círculos auxiliares são desenhados pode ser rodado arbitrariamente em torno do eixo alinhado com \vec{d} . Assim, tomando como $\phi = 0$ o caso em que este plano coincide com o definido por \vec{v}_o e \vec{u}_o a passar pela origem, em geral definido por $\vec{v}_o \times \vec{u}_o$ excepto no caso $\vec{v}_o \parallel \vec{u}_o$ em que é necessário mais informação, o ângulo ϕ fica doravante definido como o ângulo entre $\vec{v}_o \times \vec{u}_o$ e \vec{L}_μ .



O momento angular reduzido $\vec{L}_\mu = \mu \vec{r}_{-\infty} \times (\vec{u}_o - \vec{v}_o) = \mu \vec{r}_{+\infty} \times (\vec{u}_1 - \vec{v}_1)$ é perpendicular a todos os possíveis resultados de $\vec{u}_1 - \vec{v}_1$, além de ser perpendicular a $\vec{u}_o - \vec{v}_o$. Como $\vec{d} = 2(\vec{V}_{cm} - \vec{u}_o) = \frac{2m_1}{m_1+m_2}(\vec{v}_o - \vec{u}_o)$, também se verifica que \vec{d} é perpendicular a \vec{L}_μ . Vamos agora mostrar que os vectores $\vec{u}_1 - \vec{u}_o$ e $\vec{v}_1 - \vec{v}_o$ também são perpendiculares a \vec{L}_μ . Começamos por notar que $\vec{u}_1 - \vec{u}_o$ e $\vec{v}_o - \vec{u}_o$ definem o mesmo plano que $\vec{v}_1 - \vec{u}_o$ e $\vec{v}_o - \vec{u}_o$. De facto as normais a cada um destes planos são colineares, o que se pode mostrar usando a conservação de momento linear $\vec{u}_1 - \vec{u}_o = -\frac{m_1}{m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_o)$:

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1 - \vec{u}_o) \times (\vec{u}_o - \vec{v}_o) &= \vec{u}_1 \times \vec{u}_o - (\vec{u}_1 - \vec{u}_o) \times \vec{v}_o = \vec{u}_1 \times \vec{u}_o + \frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1 \times \vec{v}_o \\ (\vec{v}_1 - \vec{u}_o) \times (\vec{u}_o - \vec{v}_o) &= (\vec{v}_1 - \vec{v}_o) \times \vec{u}_o - \vec{v}_1 \times \vec{v}_o = \\ &= -\frac{m_2}{m_1} \vec{u}_1 \times \vec{u}_o - \vec{v}_1 \times \vec{v}_o = -\frac{m_2}{m_1} \left(\vec{u}_1 \times \vec{u}_o + \frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1 \times \vec{v}_o \right) \end{aligned}$$

Por outro lado este plano contém duas normais a \vec{L}_μ , a saber as rectas definidas por $\vec{v}_o - \vec{u}_o$ e $\vec{u}_1 - \vec{v}_1 = (\vec{u}_1 - \vec{u}_o) - (\vec{v}_1 - \vec{u}_o)$, portanto todos os vectores neste plano são ortogonais a \vec{L}_μ .

Vemos assim que todas as relações deduzidas no caso 2D entre as velocidades iniciais e finais se mantêm, excepto que agora os círculos auxiliares de diâmetros \vec{D} , \vec{d} e os vectores auxiliares $\vec{u}_1 - \vec{u}_o$, $\vec{v}_1 - \vec{u}_o$, \vec{n} , \vec{u}_θ e \vec{w}_θ pertencem a um plano perpendicular ao \vec{L}_μ especificado. O caso 3D reduz-se assim ao caso 2D quando $\vec{L}_\mu \propto \vec{v}_o \times \vec{u}_o$. Podemos assim dizer que as velocidades finais se obtêm a partir de duas esferas concêntricas obtidas pela rotação em torno do eixo \vec{D} dos círculos centrados em $\vec{V}_{cm} - \vec{u}_o$ com raios $r_u = |\vec{V}_{cm} - \vec{u}_o|$ e $r_v = |\vec{V}_{cm} - \vec{v}_o|$, sendo que os pontos correspondentes a uma solução em cada esfera definem uma linha passando pelo centro comum das esferas, sendo assim "antipodais" num sentido generalizado. A translacção destas esferas por \vec{u}_o define esferas concêntricas em \vec{V}_{cm} , pelo que todas as soluções possíveis no referencial de laboratório estão aí representadas da mesma forma por pontos antipodais em círculos máximos correspondendo a secções planas paralelas ao plano de Laplace especificado pelo momento angular reduzido inicial \vec{L}_μ .

O Caso relativista

• Problema de Kepler Relativístico?

O problema de Kepler Relativístico apenas tem uma solução em RG e é a de Schwarzschild assumindo um corpo esférico, não-carregado e estático e muitíssimo mais massivo que o outro.

Em RR não existem soluções convencionais do problema, principalmente devido à dificuldade em definir as constantes de movimento de forma natural.

– *Relativity and special theory*–Synge–1958

“A relativistically invariant treatment of the two-body problem has proved very difficult. Sommerfeld treated approximately the case where the two particles described circles about the mass center, but the method cannot be extended to the case of elliptical orbits.”

– *The quantum relativistic two-body bound state* Arshansky & Horwitz

– *Dynamics of a group of the relativistic Kepler problem* Horwitz

Transformada de Lorentz

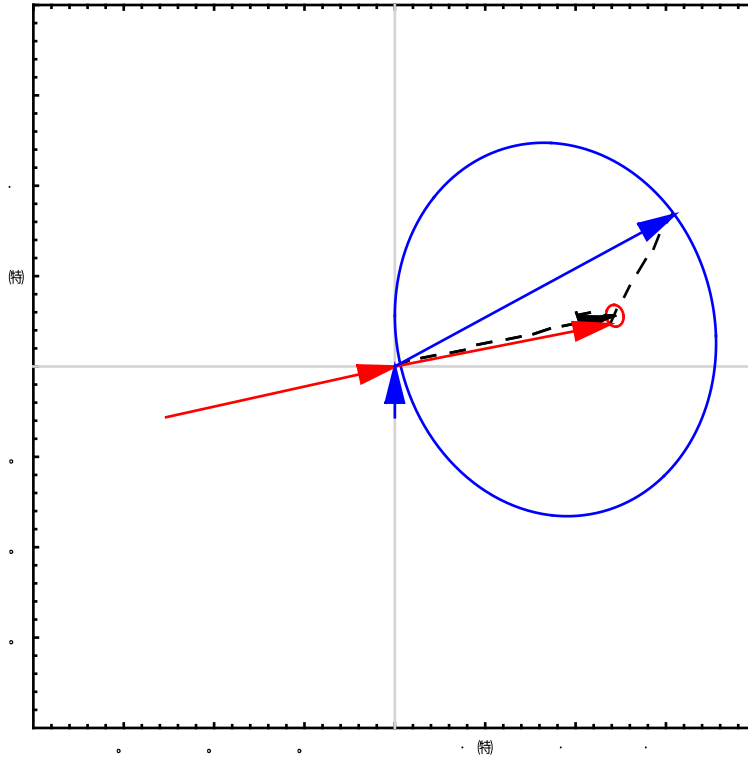
$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad e \quad \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_\perp + \gamma(v)(\vec{r}_\parallel - \vec{V}t) & \text{onde} \quad \vec{r}_\perp = \frac{\vec{V} \times (\vec{r} \times \vec{V})}{v^2} = \vec{r} - \vec{r}_\parallel \\ t_1 = \gamma(v)\left(t - \frac{1}{c^2} \vec{r} \cdot \vec{V}\right) & e \quad \vec{r}_\parallel = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V})}{v^2} \vec{V} \end{cases}$$

Transformação das velocidades

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt_1} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \frac{1}{\frac{dt_1}{dt}} = \left(\frac{d\vec{r}_\perp}{dt} + \gamma \left(\frac{d\vec{r}_\parallel}{dt} - \vec{v} \right) \right) \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2} \right)} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2} \right)} \left(\vec{u}_\perp + \gamma (\vec{u}_\parallel - \vec{v}) \right)$$

$$\vec{u}_\perp = \frac{\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{v})}{v^2} = \vec{u} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})}{v^2} \vec{v} = \vec{u} - \vec{u}_\parallel$$

$$\vec{u}_\parallel = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})}{v^2} \vec{v}$$



■ Colisão Relativista só assintoticamente

Vamos assumir que p_1 e p_2 representam os quadri-vectores energia-momento iniciais de partículas pontuais de massas em repouso m_1 e m_2 respectivamente. Então $p_i = \{m_i \gamma_i c, \mathbf{p}_i\}$ onde $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1-(v_i/c)^2}}$ e o momento linear $\mathbf{p}_i = m_i \gamma_i \mathbf{v}_i$, ou seja $p_i = m_i \gamma_i \{c, \mathbf{v}_i\}$.

Após a colisão elástica, as partículas saem com energia-momento \tilde{p}_1 e \tilde{p}_2 onde também $\tilde{p}_i = \{m_i \tilde{\gamma}_i c, \tilde{\mathbf{p}}_i\} = m_i \tilde{\gamma}_i \{c, \tilde{\mathbf{v}}_i\}$

As leis de conservação para a colisão elástica relativista resumem-se na **conservação do quadri-vector energia-momento total**

$$\mathcal{P} = p_1 + p_2 = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \tilde{\mathcal{P}}.$$

Esta expressão de facto resume a conservação do momento linear espacial total $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{P}}$ e da energia cinética total $\mathcal{E}_c = m_1 \gamma_1 c^2 + m_2 \gamma_2 c^2 - (m_1 c^2 + m_2 c^2) = m_1 \tilde{\gamma}_1 c^2 + m_2 \tilde{\gamma}_2 c^2 - (m_1 c^2 + m_2 c^2) = \tilde{\mathcal{E}}_c$. Como as massas são invariantes na colisão elástica, esta expressão reduz-se à conservação da energia total $\frac{\mathcal{E}}{c^2} = m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 = m_1 \tilde{\gamma}_1 + m_2 \tilde{\gamma}_2 = \frac{\mathcal{E}'}{c^2}$, tal como na colisão inelástica.

A equação de conservação relativista na forma $p_1 - \tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 - p_2$ traduz-se em termos de componentes nas relações $m_1(\gamma_1 - \tilde{\gamma}_1) = m_2(\tilde{\gamma}_2 - \gamma_2)$ para as massas e $\mathbf{p}_1 - \tilde{\mathbf{p}}_1 = \tilde{\mathbf{p}}_2 - \mathbf{p}_2$ (onde $\mathbf{p}_i = m_i \gamma_i \mathbf{v}_i$ e $\tilde{\mathbf{p}}_i = m_i \tilde{\gamma}_i \tilde{\mathbf{v}}_i$) para o momento linear, pelo que $m_1(\gamma_1 \mathbf{v}_1 - \tilde{\gamma}_1 \tilde{\mathbf{v}}_1) = m_2(\tilde{\gamma}_2 \tilde{\mathbf{v}}_2 - \gamma_2 \mathbf{v}_2)$.

No caso presente em que a partícula de massa m_2 está inicialmente em repouso temos que $\gamma_2 = 1$ e $\mathbf{v}_2 = 0$, donde da primeira relação se deduz que $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 - \frac{m_2}{m_1}(\tilde{\gamma}_2 - 1)$ indicando que a magnitude de $\tilde{\mathbf{v}}_1$ é sempre menor que a de \mathbf{v}_1 . Podemos mesmo afirmar que $\tilde{\gamma}_2 \leq 1 + \frac{m_1}{m_2}(\gamma_1 - 1)$.

Escrevemos agora $p_1 - \tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 - p_2$ a equação de conservação relativista, e tendo em conta que

$p_i \cdot p_i = p_i' \cdot p_i' = m_i^2 c^2$, ou que $\mathbf{p}_i^2 = m_i^2 (\gamma_i^2 - 1) c^2$, podemos projectar esta identidade na direcção de p_1 e \tilde{p}_1 para obter $\tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{v}}_2 = \frac{(\gamma_1 + \tilde{\gamma}_1)(\tilde{\gamma}_2 - 1)}{\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2} c^2 - \frac{\gamma_1}{\tilde{\gamma}_1} \mathbf{v}_1 \cdot \tilde{\mathbf{v}}_2$.

Projectando de seguida a equação $p_1 - \tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 - p_2$ na direcção de \tilde{p}_2 e usando o resultado anterior para $\tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{v}}_2$ obtém-se a expressão $\tilde{v}_2^2 = \frac{(\tilde{\gamma}_2 - 1)^2}{\tilde{\gamma}_2^2} c^2 + 2 \frac{m_1 \gamma_1}{m_2 \tilde{\gamma}_2} \left(\mathbf{v}_1 \cdot \tilde{\mathbf{v}}_2 - \frac{(\tilde{\gamma}_2 - 1)}{\tilde{\gamma}_2} c^2 \right)$. Introduzindo agora o ângulo arbitrário θ que $\tilde{\mathbf{v}}_2$ faz com a direcção de incidência \mathbf{v}_1 , de forma que $\mathbf{v}_1 \cdot \tilde{\mathbf{v}}_2 = v_1 \tilde{v}_2 \text{Cos}[\theta]$, e manipulando a expressão tendo em conta que $v_1^2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma_1^2}\right) c^2$ e $\tilde{v}_2^2 = \left(1 - \frac{1}{\tilde{\gamma}_2^2}\right) c^2$ por forma a exprimir tudo em termos de $\tilde{\gamma}_2$, obtemos após simplificação que $\tilde{\gamma}_2 = \frac{\left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)^2 + \text{Cos}[\theta]^2 (\gamma_1^2 - 1)}{\left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)^2 - \text{Cos}[\theta]^2 (\gamma_1^2 - 1)}$.

Note-se que esta expressão atinge o máximo para $\theta = 0$, mas em geral este máximo é menor que $1 + \frac{m_1}{m_2} (\gamma_1 - 1)$, i.e.

$$\tilde{\gamma}_2 \leq \frac{\left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)^2 + (\gamma_1^2 - 1)}{\left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)^2 - (\gamma_1^2 - 1)} \leq 1 + \frac{m_1}{m_2} (\gamma_1 - 1), \text{ sendo a igualdade apenas válida quando } m_1 = m_2.$$

Podemos imediatamente determinar que $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 - \frac{2 \frac{m_2}{m_1} \text{Cos}[\theta]^2 (\gamma_1^2 - 1)}{\left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)^2 - \text{Cos}[\theta]^2 (\gamma_1^2 - 1)}$.

Com estes elementos podemos directamente calcular $\tilde{\mathbf{v}}_1$ a partir da conservação do momento linear

$\mathbf{p}_1 - \tilde{\mathbf{p}}_1 = \tilde{\mathbf{p}}_2$, i.e. $m_1 (\gamma_1 \mathbf{v}_1 - \tilde{\gamma}_1 \tilde{\mathbf{v}}_1) = m_2 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\mathbf{v}}_2$, donde se conclui que $\tilde{\mathbf{v}}_1 = \frac{\gamma_1}{\tilde{\gamma}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{m_2}{m_1} \frac{\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\gamma}_1} \tilde{\mathbf{v}}_2$. Iremos assumir que

$\mathbf{v}_1 = v_1 \vec{e}_x = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_1^2}} \vec{e}_x$ define a direcção \vec{e}_x e que $\tilde{\mathbf{v}}_2 = \tilde{v}_2 \vec{u}_\theta = c \sqrt{1 - \frac{1}{\tilde{\gamma}_2^2}} (\text{Cos}[\theta] \vec{e}_x + \text{Sin}[\theta] \vec{e}_y)$. A substituição das expressões para $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ determinadas anteriormente permite assim escrever

$$\tilde{\mathbf{v}}_2 = \frac{2c \sqrt{\gamma_1^2 - 1} \text{Cos}[\theta] \left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)}{(\gamma_1^2 - 1) \text{Cos}[\theta]^2 + \left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)^2} \vec{u}_\theta$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \frac{c \sqrt{\gamma_1^2 - 1} \left((\gamma_1^2 - 1) \text{Cos}[\theta]^2 - \left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)^2 \right)}{(\gamma_1^2 - 1) \text{Cos}[\theta]^2 \left(2 \frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right) - \gamma_1 \left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)^2} \vec{e}_x + \frac{2c \sqrt{\gamma_1^2 - 1} \text{Cos}[\theta] \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)}{(\gamma_1^2 - 1) \text{Cos}[\theta]^2 \left(2 \frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right) - \gamma_1 \left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)^2} \vec{u}_\theta$$

Em termos de componentes

$$\tilde{\mathbf{v}}_2 = c \left\{ \frac{2 \sqrt{\gamma_1^2 - 1} \text{Cos}[\theta]^2 \left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)}{(\gamma_1^2 - 1) \text{Cos}[\theta]^2 + \left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)^2}, \frac{2 \sqrt{\gamma_1^2 - 1} \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[\theta] \left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)}{(\gamma_1^2 - 1) \text{Cos}[\theta]^2 + \left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)^2} \right\}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = c \left\{ \frac{\sqrt{\gamma_1^2 - 1} \left(\text{Cos}[\theta]^2 \left((\gamma_1^2 - 1) + 2 \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right) \right) - \left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)^2 \right)}{(\gamma_1^2 - 1) \text{Cos}[\theta]^2 \left(2 \frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right) - \gamma_1 \left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)^2}, \frac{2 \sqrt{\gamma_1^2 - 1} \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[\theta] \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)}{(\gamma_1^2 - 1) \text{Cos}[\theta]^2 \left(2 \frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right) - \gamma_1 \left(\frac{m_2}{m_1} + \gamma_1\right)^2} \right\}$$